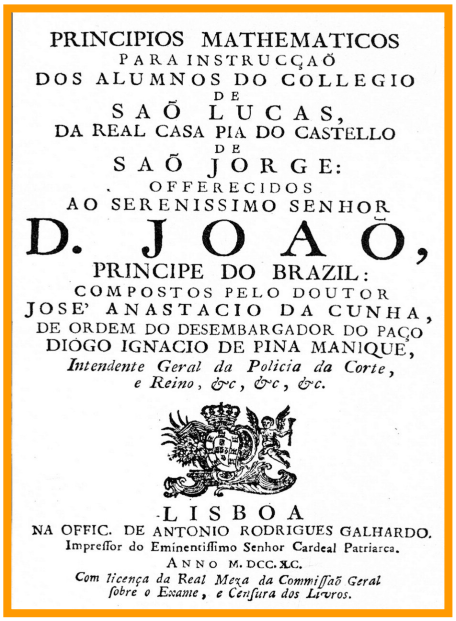
*Revista Brasileira de História da Matemática*
*Especial nº 1 – Festschrift Ubiratan D'Ambrosio – (dezembro/2007)*
*Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática*
ISSN 1519-955X

# RELAÇÕES EPISTEMOLÓGICAS DE ELEMENTOS HISTÓRICOS DO CÁLCULO A PARTIR DA OBRA *PRINCIPIOS MATHEMATICOS* DE JOSÉ ANASTÁCIO DA CUNHA

Lígia Arantes Sad
*UFES - Brasil*

*Quando para onde estás os olhos lanço,*
*Tantos gostos ao pé de ti passados*
*Vejo na fantasia retratados,*
*Tão vivos, que jàmais de ver-te canso!*
José Anastácio da Cunha

A variação de edições e a conservação de obras históricas a partir do séc. XVII, aliada a publicações mais recentes que comentam os processos e produtos dessas produções matemáticas, são fatores que permitem uma amplitude de referências e relações quando investigamos determinados temas ou objetos históricos. O que pretendemos neste texto é, com auxílio desses nomeados fatores, trazer mais uma parcela de reflexão histórico epistemológica ao panorama de desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Especificamente, estaremos nos referindo a determinadas estipulações e objetos matemáticos, que são evidenciados no tratamento do cálculo elaborado pelo matemático, poeta português, José Anastácio da Cunha (1744 -1787) em seu *Principios Mathematicos*. Esta obra publicada em 1790 não teve nesta época divulgação e debate que destacassem sua importância ou a grandeza de sua precisão nas elaborações matemáticas (Nobre, 2005; Domingues, 2000; Baroni, 1997; Duarte, Silva e Queiró, 1996), muito embora José Anastácio da Cunha tenha estudado e chegado a ocupar com prestigio a cátedra de


PRINCIPIOS MATHEMATICOS
PARA INSTRUCÇAÕ
DOS ALUMNOS DO COLLEGIO
DE
SAÕ LUCAS,
DA REAL CASA PIA DO CASTELLO
DE
SAÕ JORGE:
OFFERECIDOS
AO SERENISSIMO SENHOR
D. JOAÕ,
PRINCIPE DO BRAZIL:
COMPOSTOS PELO DOUTOR
JOSE' ANASTACIO DA CUNHA,
DE ORDEM DO DESEMBARGADOR DO PAÇO
DIOGO IGNACIO DE PINA MANIQUE,
*Intendente Geral da Policia da Corte, e Reino, &c, &c, &c.*
LISBOA
NA OFFIC. DE ANTONIO RODRIGUES GALHARDO.
Impressor do Eminentissimo Senhor Cardeal Patriarca.
ANNO M.DCC.XC.
*Com licença da Real Meza da Commissaõ Geral sobre o Exame, e Censura dos Livros.*

Frontispício da obra de Anastácio da Cunha de 1790.

geometria na Universidade de Coimbra. Três diferentes motivos observados na história da matemática em Portugal são pertinentes ao se pensar uma resposta a esta omissão. Um deles, o pouco debate entre os próprios autores portugueses daquela época a respeito de suas obras, deixando essa publicação de José Anastácio da Cunha restrita ao âmbito do Collegio de São Lucas, para o qual foi dirigida a serviço da instrução dos alunos. Outro motivo, a proliferação e aceitação de importantes publicações sobre o cálculo diferencial e integral, geradas em eminentes academias científicas como a Academia de Paris, Royal Society em Londres, Academia de Berlin, Academia de Lincei e Academia Soviética de Ciências em San Petersburgo, visto que era um período efervescente de produções posteriores às de Newton e Leibniz. Um terceiro motivo, que também merece ser comentado, foi o impacto social causado, principalmente na Europa, por contundente e argumentada crítica do bispo George Berkley[1] aos fundamentos principais do cálculo apresentados por Newton e Leibniz. Uma vez que isso pode ter abalado e afastado a credibilidade em autores mais desconhecidos da época, porém seguidores em grande parte desses fundamentos, como José Anastácio da Cunha[2]. Contudo, devemos estar atentos de que estes motivos são também passíveis de terem composto uma conjunção de fatores que contribuíram para a pouca proeminência dos escritos de da Cunha. Fatores estes nem sempre tão evidentes ou presentes na história da matemática conhecida, podendo ainda ser explorados pelas análises de outros olhares e o agregar de novos elementos.

Recentemente, por exemplo, fomos surpreendidos por uma notícia que está a reavivar e embaraçar as questões de prioridades ontológicas do desenvolvimento histórico do cálculo imputado a Newton e Leibniz. Trata-se da notícia que circula internacionalmente[3] a respeito das pesquisas de dois cientistas de universidades britânicas – George Gheverghese Joseph (Universidade de Manchester) e Dennis Almeida (Universidade de Exeter) – de que teriam sido matemáticos e astrônomos da Escola Kerala, na Índia, os produtores do cálculo infinitesimal ainda entre os séc. XIV e XVI, portanto, anteriores a Newton e Leibniz. Ademais, Joseph afirmou que integrantes dessa Escola de Kerala teriam transmitido informações de seus conhecimentos a jesuítas do continente europeu, que visitaram a Índia na era das grandes navegações. Esses jesuítas, por sua vez, teriam propiciado a chegada das informações até Newton. Deste modo, em meio a essas incertezas, hipóteses e embaraços, novas constituições críticas da história poderão ser relativizadas pelos diálogos imaginários com outros textos.

Contudo, à parte dessas novidades, os argumentos das análises epistemológicas construídas a respeito das obras de Newton e Leibniz continuam válidos, bem como os relacionamentos a outras obras, menos famosas, com traços semelhantes. Assim considerando, não poderia deixar de citar primeiramente elogios ao artigo de Baroni & Balieiro (1997) e Baroni (2001), no qual também encontramos análises comparativas ao tratamento dispensado ao cálculo por da Cunha, em grande parte de sua obra *Princípios Mathematicos*, gerada em aproximadamente 10 anos, em meio a um contexto de muitas produções sobre cálculo e publicada somente após sua morte (1787).

[1] Referenciado historicamente em *The Analyst*, 1734.
[2] Reforços quanto a este motivo e sua repercussão em Portugal podem ser vistos em Domingos, J. C. , 2000.
[3] Capturada no endereço: http://www.socialsciences.manchester.ac.uk/economics/staffpages/joseph/ , acessada em agosto de 2007.

Antes de passar às análises de pontos relativos ao cálculo, é interessante situar, de modo breve, a constituição dessa citada obra. Ela é composta de 302 páginas, divididas em 21 *Livros* (capítulos), cuja apresentação dos princípios do cálculo se encontram mais concentrados a partir do *Livro XV*. Ao final temos mais 12 páginas que compõem uma errata e, além disso, há um anexo somente com figuras geométricas, agrupadas pelos *Livros* (capítulos) que têm referências à geometria e numeradas de acordo com as *Proposições* para as quais elas servem de ilustração ao entendimento e argumentação de validação ao que é demonstrado.

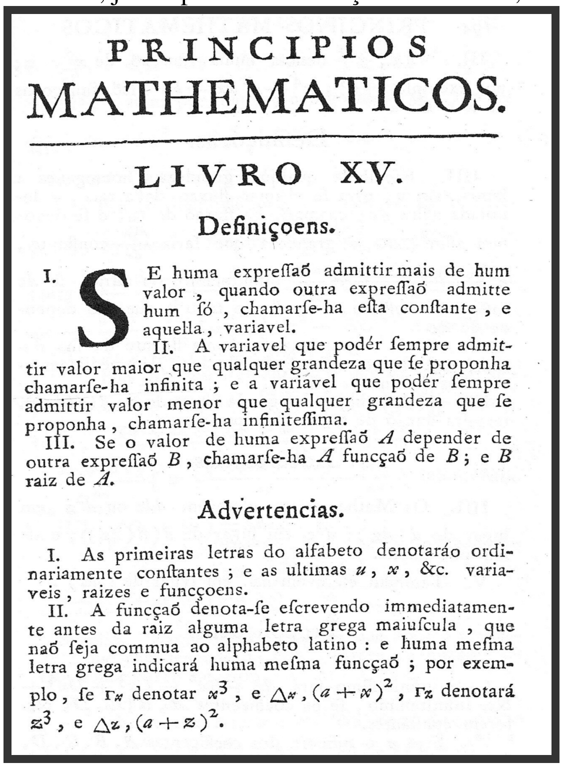
Conforme já mencionado e constante no frontispício dessa obra (em ilustração anterior), tudo indica que seu autor a tenha escrito com intenção de uso didático, e podemos notar que, a cada capítulo, ele procura manter uma estruturação comum. Cada assunto é iniciado de *Definições*, das mais simples ou básicas para definições ou resultados mais complexos, seguidos por observações pertinentes (geralmente à representação simbólica que é usada na escrita) que denomina de *Advertências* (em ilustração seguinte). Existem exercícios resolvidos em itens nomeados *Proposições* e também *Exemplos*, ou ainda como *Problemas* (do *Livro XI* ao *Livro XIV*). As *Definições* são revestidas de rigor (relativo à época), assim como as demonstrações de resultados constantes em várias *Proposições*, notando-se raízes de um formalismo euclidiano cuja geometria ainda era hegemônica e predominante nas validações matemáticas de provas. Não contém qualquer menção bibliográfica, mas em Saraiva (2007, p. 21) encontramos que José Anastácio da Cunha, como professor de Geometria na Universidade de Coimbra (1773 a 1778), utilizava os *Elementos* de Euclides e o *Traité d'Arithmétique* de Etienne Bézout, que sabemos conter princípios formalistas e de progressão hierárquica quanto à complexidade da matemática tratada.

A seguir, apresento uma reflexão epistemológica, a partir de elementos básicos nos escritos de José Anastácio da Cunha a respeito do cálculo diferencial e integral. Entre esses elementos temos alguns já analisados por autores referenciados neste texto, aos quais reforço ou me diferencio, além de acrescentar outros focos de análise.

**Elementos do cálculo escolhidos como destaque**

O aspecto mais geral em relação ao cálculo presente no texto *Princípios Mathematicos*, diz respeito ao modo como José Anastácio da Cunha, apesar de incorporar a nomenclatura de Newton e seus seguidores quanto ao uso das palavras *fluente* e *fluxão* (ao se reportar a integral e derivada), adota muito mais uma notação próxima a de Leibniz e seguidores (por exemplo: *dx*, $\int x$, *infinitésimo*). Além disso, reforça os vestígios leibnizianos no uso de infinitésimos em suas demonstrações mais algebrizadas, muito embora com definições e conceitos centrais relativos ao cálculo bem semelhantes aos de Leonard Euler (1707-1783) e até mesmo de D'Alembert (1717-1783). Ou seja, ainda que sejamos levados a comparar as elaborações dos matemáticos posteriores com as de Newton e Leibniz, as semelhanças diretas podem ser mais pertinentes se considerarmos outros grandes matemáticos posteriores, continuadores do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Esse é o caso da defesa principal que destaco nessa análise – da aproximação de idealizações de José Anastácio da Cunha com alguns matemáticos contemporâneos, sem certamente desprezar a influência newtoniana e leibniziana recém consolidada. Isto, a meu ver, marca e reforça a atualização e até avanços desse matemático português em relação ao que se produzia naquela época nos destacados centros científicos europeus.

Podemos observar na figura seguinte, por exemplo, um pouco dessa miscigenação epistemológica em da Cunha, já nas primeiras definições do cálculo, no *Livro XV* .



PRINCIPIOS
MATHEMATICOS.

LIVRO XV.

Definiçoens.

I. SE huma expreſſaõ admittir mais de hum valor , quando outra expreſſaõ admitte hum ſó , chamarſe-ha eſta conſtante , e aquella , variavel.

II. A variavel que podér ſempre admittir valor maior que qualquer grandeza que ſe proponha chamarſe-ha infinita ; e a variavel que podér ſempre admittir valor menor que qualquer grandeza que ſe proponha , chamarſe-ha infiniteſſima.

III. Se o valor de huma expreſſaõ $A$ depender de outra expreſſaõ $B$ , chamarſe-ha $A$ funcçaõ de $B$ ; e $B$ raiz de $A$.

Advertencias.

I. As primeiras letras do alfabeto denotaráo ordinariamente conſtantes ; e as ultimas $u$ , $x$ , &c. variaveis , raizes e funcçoens.

II. A funcçaõ denota-ſe eſcrevendo immediatamente antes da raiz alguma letra grega maiuſcula , que naõ ſeja commua ao alphabeto latino : e huma meſma letra grega indicará huma meſma funcçaõ ; por exemplo , ſe $\Gamma x$ denotar $x^3$ , e $\Delta x$ , $(a+x)^2$ , $\Gamma z$ denotará $z^3$ , e $\Delta z$ , $(a+z)^2$.

Página 193, da edição fac-símile de 1987 de da Cunha.

No tratamento aos princípios fundamentais do cálculo, da Cunha inicia pela preocupação em apresentar uma definição do que entende por variáveis, inclusive estendendo para a idéia de variáveis infinitas e infinitésimas. Porém, embora com apoio nas estipulações infinitesimais, ele o faz de modo distinto de Leibniz; vejamos porque.

De modo geral, no séc. XVIII as considerações infinitesimais estão presentes na maioria das publicações sobre cálculo[4], mesmo porque o uso de limite ligado a funções, como base rigorosa para o cálculo, somente começou a ser consolidado com os trabalhos de d'Alembert (1717-1783) e Cauchy (1789-1857). Contudo, mesmo usando infinitesimais, temos diferenciações entre os tratamentos dos autores. Alguns os usam de modo velado, com nome fictício em meio a conceitos de movimento contínuo de um ponto, como Newton e seguidores: *quantidade evanescentes*[5], enquanto Leibniz, por sua vez, nomeia e define

[4] Boyer, C. B. (1959) e Wussing, H. (1998).

[5] Detalhes podem ser observados, por exemplo, em Newton 1962, tradução de Andrew Motte, p.38-39.

como *quantidades infinitamente pequenas* (ou *infinitesimais*)[6]. Mas, como afirma Alcoba (1996, p. 160), Leibniz considera que:

> Los infinitesimales no son nunca um número y ni siquiera uma cantidaad, sino um rango de números que desejamos sin especificar porque no hace falta, basta decir que es um número menor que qualquier outro asignable.

Outros matemáticos, como L'Hôpital, usam as *quantidades infinitamente pequenas* como um dos fundamentos do cálculo, mas sem definir ou questionar sua existência[7].

Particularmente, Euler em seu *Institutiones Calculi Differentialis* em *Opera Omnia I*, segundo Katz, V. J. (1993, p. 515-517), inicia o livro dando uma seqüência de valores variáveis $x$, $x+\omega$, $x+2\omega$, ... e os diferentes valores das funções y, y', y'', ..., para as quais as diferenças primeiras são $\Delta y = y' - y$, $\Delta y' = y'' - y'$, ..., as segundas diferenças $\Delta\,\Delta y = \Delta y' - \Delta y$, $\Delta\,\Delta y' = \Delta y'' - \Delta y$ , ... e analogamente as mais altas diferenças. Segue com exemplo prático, para o caso de $y = x^2$ , que tem $y' = (x+\omega)^2$ e, portanto, $\Delta y = 2\omega x + \omega^2$, $\Delta\,\Delta y = 2\omega^2$ e as ordens posteriores nulas, seguindo depois disso com o desenvolvimento de regras para se calcular diferenciais. Nesse mesmo texto Euler firma que: " a análise dos infinitesimais (...) é apenas um caso particular do método das diferenças (...) as quais surgem quando as diferenças, as quais eram previamente assumidas como finitas, são tomadas como infinitamente pequenas". Simplesmente, ele admite a existência infinitesimal de várias ordens, mas rejeita que possam ser algo diferente de zero, como mostra ao final dos processos de cálculo, por isto as toma sempre iguais a zero.

Se, no entanto, observarmos o uso e definição infinitesimal em da Cunha, veremos que se parecem com os de Euler, porém são diretos e claros, sem a presença das dúvidas existenciais. Especificamente no caso de *variável infinitésima*, esse matemático português define sendo aquela que admite "*valor menor que qualquer grandeza que se proponha*" (definição II, p. 193; imagem anterior) e usa em várias de suas demonstrações, tendo como princípio a existência de valores infinitesimais.

Quanto às definições de quantidade constante e variável, bem como de função, Euler em *Introdução a Análise dos Infinitos* (1748) dedica o capítulo I – *Das funções em geral* – estendendo-se também a outras classificações de funções. Por exemplo, à página 4 encontramos:

> 4. *Functio quantitatis variabilis, eſt expreſſio analytica quomodocunque compoſita ex illa quantitate variabili, & numeris ſeu quantitatibus conſtantibus.*
>
> Omnis ergo expreſſio analytica, in qua præter quantitatem variabilem $z$ omnes quantitates illam expreſſionem componentes ſunt conſtantes, erit Functio ipſius $z$: Sic $a+3z$; $az - 4zz$; $az + b\sqrt{(aa - zz)}$; $c^z$; &c. ſunt Functiones ipſius $z$.

---

[6] Leibniz, tradução de Peyroux, 1983, p. 43. Ou em Leibniz, tradução de Alcoba, 1996, p.159-160, na seguinte definição: *"El infinitesimal, como el infinito, está siempre inacabado. (...) El infinito és como el cero, algo que carece de correlato real, em definitiva' um modo de hablar'. Um estatus semejante tendrán los infinitesimales.*

[7] Baron, M.E. (1985, p.8).

4. *Função de uma quantidade variável é qualquer expressão analítica composta como se queira que seja por essa quantidade e números ou quantidades constantes.*
Será pois função de $z$ toda expressão analítica em que sejam constantes todas as quantidades que compõem sua expressão, exceto a mesma $z$; assim $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b\sqrt{(aa - zz)}$; $c^z$; etc, são funções de $z$.

[Tradução nossa]

A definição de função ainda é mais ampliada pelo próprio Euler: "quando certas quantidades dependem sobre outras de maneira que estas sofrem uma mudança quando aquelas mudam, então as primeiras são chamadas funções das segundas" [tradução nossa], conforme citam os editores Guardeño & Fernández (2000, p. 61), em nota comentada sobre o fac-símile *Institutiones calculi differentialis* (1755). Neste momento vamos retornar a da Cunha que, como Euler, traz em destaque inicial sua preocupação com as variáveis e funções. Logo após definir variável (entre essas as infinitésimas), da Cunha explicita uma definição de função e, a seguir, apresenta também exemplos com representações de funções por expressões algébricas. Abrimos aqui um parêntese neste momento para notar que, principalmente entre professores de matemática, ainda hoje é realçada a discussão sobre variável como elemento indispensável ao entendimento sobre função.

Na definição de função de Euler em *Introdução a Análise dos Infinitos* (veja imagem e tradução em parágrafo anterior) há referência direta a uma *expressão analítica*, que a princípio parece referir-se simplesmente a uma expressão composta por constantes e variáveis, se bem que mais tarde é implementada por ele mesmo na questão do significado de *analítica*[8]. De modo muito semelhante podemos observar a definição III de da Cunha (em imagem da p. 193), onde vemos escrito "*huma expreſſaõ A*" na definição de função, após a qual existe a preocupação em representar a notação por meio de exemplos, como $x^3z^5$ ou $x^4 - axz + bz^3$, que são para ele funções de $x$ e $z$.

Por parte de Leibniz encontramos, segundo Youschkevitch (1976, p. 55) em cartas entre Leibniz e Jean Bernoulli a afirmação: "*uma função de uma variável é definida como uma quantidade composta de alguma maneira por uma variável e constantes*". Reforçamos então que em Euler e em da Cunha temos maior esclarecimento quanto a essa "*alguma maneira*", no significado transposto por *expressão analítica* ou *expressão*, respectivamente. Inclusive em da Cunha pode-se notar uma ênfase na independência quanto a notação, seja anotando pela letra $x$ ou $z$, a função poderá ser a mesma (enquanto um 'operador', em nosso entendimento atual), por exemplo: se $\Gamma x$ denota $x^3$ então $\Gamma z$ denota $z^3$.

Em D'Alembert, concordando com Katz, V. J. (1993, p. 523), a função é definida como em Euler – uma expressão analítica relacionando variáveis –, portanto também um contemporâneo com semelhança ao que escreve da Cunha. Até mesmo na questão simbólica da notação, da Cunha e D'Alembert, usaram a notação de Jean Bernoulli,

[8] Maiores detalhamentos sobre esse significado para Euler encontramos na edição de Gardeño, A. J. D. e Fernández, F. J. P. (2000, p. 15-16) em nota comentada, na qual entre outras coisas afirma que *expressão analítica* passa a englobar toda função reduzível a um expressão infinita do tipo $Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + \&c$, onde os expoentes são números quaisquer.

indicando uma função seguida de sua variável, por exemplo, $\phi x$ para indicar $\phi$ como função da variável *x*. Enquanto que Euler, embora tenha sido o introdutor da notação com o uso de parênteses, como atualmente usamos, *f(x)* – para indicar *f* como função da variável *x* – ele escreve freqüentemente apenas com letra maiúscula e sem parênteses, por exemplo, *Z* como uma função de *z*, conforme encontramos em sua obra *Introdução à análise dos infinitos* (1748, p. 8):

> 11. *Functio biformis ipſius* z *eſt ejuſmodi Functio, quæ pro quovis ipſius* z *valore determinato, geminum valorem præbeat.*
>
> Hujuſmodi Functiones radices quadratæ exhibent, ut $\surd(2z + zz)$: quicunque enim valor pro $z$ ſtatuatur expreſſio $\surd(2z + zz)$ duplicem habet ſignificatum, vel affirmativum vel negativum. Generatim vero $Z$ erit Functio biformis ipſius $z$, ſi determinetur per æquationem quadraticam $Z^2 - PZ + Q = 0$: ſi quidem $P$ & $Q$ fuerint Functiones uniformes

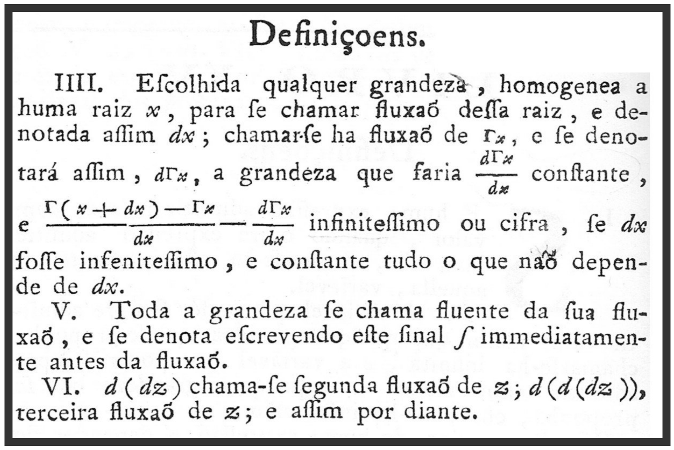
11. *É função biforme de z aquela função que apresenta valores duplos para qualquer valor determinado de z.*

Tais funções apresentam raízes quadradas, tal como $\sqrt{(2z+zz)}$: com o que , qualquer que seja o valor estabelecido para *z*, a expressão $\sqrt{(2z+zz)}$ tem duplo significado, afirmativo ou negativo. Em geral, *Z* seria função biforme de *z*, se determinada pela equação quadrática $Z^2 - PZ + Q = 0$, forem *P* e *Q* funções uniformes ( ...)

[Tradução nossa]

Em termos de diferenciais e integrais, como já afirmamos anteriormente, da Cunha apesar de usar as palavras *fluente* e *fluxão*, próprias do cálculo newtoniano, o faz somente para nomear o que conhecemos por integral e diferencial conforme podemos ver em *Princípios Mathematicos*, *Livro XV* , p. 194 (próxima imagem). Porém, ele adota símbolos próprios a Leibniz e seus seguidores, tais como: *dx*, $\int x$ e *infinitésimo.*[9]

[9] Em Boyer, C.B. (1959, p.232-235) encontramos que essa é uma atitude que aparece nos escritos de matemáticos do século XVIII, que recaiam na confusão entre fluxões e momentos, ou mesmo na não clareza a respeito da transição de diferenças finitas para fluxões. Baron, M. E. e Bos, H. J. M. (1985, p. 17-18) relatam que estas 'misturas' de representações simbólicas e mesmo de significados não eram raros nesse início do desenvolvimento do cálculo; eles afirmam: *"os primeiros escritores ingleses de livros sobre cálculo fluxional aceitavam com facilidade a existência de quantidades infinitamente pequenas e até mesmo usavam o termo 'fluxão' indiscriminadamente para quantidades infinitamente pequenas, bem como para fluxões no sentido de Newton"*.



**Definiçoens.**

IIII. Eſcolhida qualquer grandeza, homogenea a huma raiz $x$, para ſe chamar fluxaõ deſſa raiz, e denotada aſſim $dx$; chamar-ſe ha fluxaõ de $\Gamma x$, e ſe denotará aſſim, $d\Gamma x$, a grandeza que faria $\frac{d\Gamma x}{dx}$ conſtante, e $\frac{\Gamma(x+dx)-\Gamma x}{dx}-\frac{d\Gamma x}{dx}$ infiniteſſimo ou cifra, ſe $dx$ foſſe infeniteſſimo, e conſtante tudo o que naõ depende de $dx$.

V. Toda a grandeza ſe chama fluente da ſua fluxaõ, e ſe denota eſcrevendo eſte final $\int$ immediatamente antes da fluxaõ.

VI. $d(dz)$ chama-ſe ſegunda fluxaõ de $z$; $d(d(dz))$, terceira fluxaõ de $z$; e aſſim por diante.

*Definições* de da Cunha, página 194, da edição fac-símile de 1987.

No entanto, no modo de proceder para estabelecer as regras básicas de cálculo das *fluxões* e *fluentes*, da Cunha também se diferencia de Leibniz e se aproxima de outros matemáticos como L'Hôpital, Jean Bernoulli, Euler e D'Alembert. Essa consideração é principalmente realçada pelo modo de uso das diferenças finitas e infinitésimas na obtenção das fluxões, bem como no esforço em destacar mais estipulações algébricas que geométricas nesse processo[10].

Assim, por exemplo, semelhante a d'Alembert, da Cunha acredita poder sempre encontrar as razões de diferenças $\left(\frac{d\Gamma x}{dx}\right)$ como constante, se *dx* infinitésimo e constante o que não depende de *dx*. O que, por sua vez, D'Alembert expressa adicionando a idéia nascente de encontrar um limite, sem querer tomar o infinitesimal com 'existência prévia', como transparece ao afirmar: "*A diferenciação de equações consiste em encontrar o limite da razão de diferenças finitas de duas variáveis incluídas na equação*" (D'Alembert, 1754, in Katz, V., 1993, p. 529)[11].

Na obtenção das regras de diferenciação, da Cunha trabalha com a diferença entre as razões: $\frac{\Gamma(x+dx)-\Gamma x}{dx}-\frac{d\Gamma x}{dx}$ (*) , desenvolvendo-a em termos da expressão das funções e mostrando que é um infinitésimo ou zero (*cifra*), desde que se considere *dx* um infinitésimo. Observemos que a primeira dessas razões nada mais é do que o quociente, cujo limite de *dx* tendendo a zero, designamos por derivada de $\Gamma x$. Portanto, para afirmar que dada expressão ($d\Gamma x$) é a fluxão de $\Gamma x$, bastará mostrar que a diferença (*) entre as razões é zero ou um infinitésimo. Essa idéia converge para o direcionamento que anos

[10] Veja uma análise epistemológica de elementos do cálculo relativos aos métodos infinitesimais, incluindo as elaborações de Newton e Leibniz, em Sad, L. A. (2002).

[11] Em Katz, V. J. (1993) e Struik, D. J. (1989) , encontramos que essa citação de D'Alembert está publicada no artigo "*Différentiel*" que ele escreveu para a *Encyclopédie*, de D. Diderot, em 1754.

depois leva Cauchy, A. L. (1823, p. 4) a escrever: "sempre que os valores numéricos sucessivos de uma mesma variável decrescem indefinidamente de modo a tornar-se menor que todo número dado, esta variável terá o nome de um *infiniment petit* ou uma quantidade infinitamente pequena". A seguir, na página 9, terceira lição, entitulada "derivada de função de uma só variável", Cauchy expressa a razão das diferenças por $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$, onde $\Delta x = i$, e afirma que os dois termos da razão serão quantidades infinitamente pequenas, cuja razão pode convergir para um limite positivo ou negativo, indo além nas explicações da questão de limite de uma função.

Assim, ao mesmo tempo em que é admirável[12] a abordagem de da Cunha sobre a convergência de séries infinitas, dezenas de anos antes de Cauchy, é apropriado pensar que essa abordagem tenha sido uma seqüência naturalmente lógica e adequada aos significados já constituídos e usados por da Cunha sobre idéias de limite de uma variável, quando esta se aproxima cada vez mais de um determinado valor. A respeito desse elemento do cálculo – limite de grandeza (variável) e não de função –, encontramos outro ponto de reforço e afinidade em D'Alembert, que afirma:

> Diz-se que uma grandeza é o limite de outra grandeza, quando a segunda pode aproximar-se da primeira tanto quanto se queira, embora a primeira grandeza nunca possa exceder a grandeza da qual ela se aproxima: de modo que a diferença entre tal quantidade e seu limite é absolutamente indeterminável. (D'ALEMBERT, in BARON, 1985, p.28).

Na definição de série convergente, essa noção de uma grandeza variável que se "aproxima a um limite", ou de diferença cada vez mais desprezível com a soma dos termos sucessivos, são centrais. A seu modo da Cunha envolve essas noções ao apresentar a definição de série convergente – *Definição I*, do *Livro VIIII*, à página 106.

> **Definiçaõ I.**
>
> SERIE convergente chamam os Mathematicos àquella, cujos termos saõ ſemelhantemente determinados, cada hum pelo numero dos termos precedente, de ſorte que ſempre a ſerie ſe poſſa continuar, e finalmente venha a ſer indifferente o continua-la ou naõ, por ſe poder deſprezar ſem erro notavel a ſomma de quantos termos ſe quizeſſe ajuntar aos já eſcritos ou indicados :

Nessa definição, para entendimento sobre série convergente o autor recorre à idéia de alcance de um certo valor (soma da série), caso a variação e adição de mais termos sejam desprezíveis, ou seja, tornar-se-á indiferente continuar a somar termos que cada vez menos provocam diferença no total (limite ao infinito).

---

[12] Relato dessa admiração é encontrada em Baroni & Balieiro (1997) e em Duarte, A. L.; Silva, J. C. e Queiró, J. F. (1996).

**Comentários finais**

Reflexões e análises epistemológicas de textos matemáticos históricos podem sustentar o prazer de realçar interessantes produções que a princípio ficaram relegadas às prateleiras e mais recentemente vieram a ser prestigiadas. Vários fatores contribuem para esse transcorrer, entre eles as escolhas históricas construídas e divulgadas por centros científicos dominantes. Além disso, concordando com D'Ambrosio (1994, p.53) :

> Certas manifestações não são consideradas como sendo Matemática e portanto são excluídas da história. Como conseqüência a história não contribui para uma nova visão epistemológica, pois as manifestações excluídas não são analisadas.

Isso parece ter ocorrido durante quase dois séculos com a obra *Principios Mathematicos*, de José Anastácio da Cunha, que só mais recentemente veio a integrar o panorama da história da matemática, apesar de ser uma rica produção européia do séc. XVIII, época de ralce de grandes nomes e obras, especificamente no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.

No intuito de contribuir a reflexões a partir desta obra, procedemos a análises epistemológicas que nos conduziram a aproximações maiores às noções de cálculo de renomados matemáticos como D'Alembert e Euler e um pouco mais distantes do cálculo de Newton e Leibniz.

Outras relações epistemológicas entre elementos de cálculo diferencial e integral presentes na obra *Principios Mathematicos* de da Cunha poderão ser motivo de análises, tendo em conta o acréscimo de documentos e novas produções da história da matemática. Vantagens teremos em compreender que há muitos meandros e contextos a serem historicamente explorados.

**Referências**:

ALCOBA, M. L. *La ley de continuidad en G. W. Leibniz*. Sevilha: Universidad de Sevilla, 1996.

BARON, M. E.; BOS, H. J. M. *Curso de História da Matemática*: origens e desenvolvimento do cálculo, v. 3 e 4. Tradução de José R. Braga Coelho, Rudolf Maier e Mª José M. M. Mendes. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.

BARONI, R. L. S. Aspects of differential equations in José Anastácio da Cunha's Mathematical Principles. *Revista Brasileira de História da Matemática,* v. 1, n. 2. Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2001, p. 27-36.

BARONI, R. L. S.; BALIEIRO, I. F. A concepção de infinitésimos presente na obra "Princípios mathematicos" de J. A. da Cunha. *Anais do II Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática e II Seminário Nacional de História da Matemática*, 1997, p. 361-368.

BOYER, C.B. *The History of the Calculus and its conceptual development*. New York: Dover, 1959.

CAJORI, F. *A History of Mathematics*. New York: Macmillan & Co., 1950.

CAUCHY, A. L. *Résumé des leçons sur le Calcul Infinitésimal*. Paris: L'Imprimerie Royale, 1823.

CUNHA, J. A. *Princípios Mathematicos.* Coimbra: Universidade de Coimbra, fac-símile de edição publicada em 1790.

D'AMBROSIO, U. O futuro da história: algumas preocupações metodológicas.*Anais da Reunião do Grupo Internacional de estudos sobre as relações entre História e Pedagogia da Matemática – HPM*, 1994, p. 47-54.

DOMINGUES, J. C. A questão dos Princípios do Cálculo em Portugal (1786-1806). *Resumos dos Projetos e Teses do III Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática.* Universidade de Coimbra, 2000, p.1-2.

DUARTE, A. L; SILVA, J. C.; QUEIRÓ, J. F. Algumas notas sobre a história da matemática em Portugal. *Anais da Reunião do Grupo Internacional de estudos sobre as relações entre História e Pedagogia da Matemática – HPM ,satellite meeting ICME – 8*. Universidade do Minho, 1996, p. 102-112.

EULER, L. *Introductio in Analysin Infinitorum*. Edição fac-simile, 1748. Sevilha: SAEM "Thales"- Real Sociedad Matemática Española, 2000.

GARDEÑO, A. J. D.; FERNÁNDEZ, F. J. P. *Introducción al Análisis de los Infinitos* por Leonhard Euler. Sevilha: SAEM "Thales"- Real Sociedad Matemática Española, 2000.

KATZ, V. J. *A History of Mathematics*: uma introduction. New York: HarperCollins College, 1993.

LEIBNIZ, G. W. *Oeuvre concernant le Calcul Infinitesimal*. Tradução de Jean Peyroux. Paris: Librairie A. Blanchard, 1983.

_____ *La naissance du calcul différentiel*. Tradução e notas por Marc Parmentier. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1989.

NEWTON, I. *Principia*. Tradução de Andrew Motte em 1729. Califórnia: University of California, 1962.

_____ *Princípios matemáticos de la filosofia natural*. Madrid: Alianza, 1998.

_____ Tratado de Métodos de series y fluxiones.Tradução de Iztaccíhuatl Vargas. *Colección MATHEMA*. México: UNAM, 2001.

NOBRE, S. Isidoro de Sevilla e a História da Matemática presente em sua Enciclopédia "Etimologias" (séc. 7). *Revista Brasileira de História da Matemática,* v. 5, n. 9. Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2005, p. 37-58.

QUEIRÓ, J. F. José Anastácio da Cunha: um matemático a recordar, 200 anos depois. *Matemática Universiária*, n. 14. Sociedade Brasileira de Matemática, 1992, p. 5-27.

SAD, L. A. Problemas epistemológicos no período de emergência do cálculo infinitesimal. *Revista Brasileira de História da Matemática,* v. 2, n. 3. Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2002, p. 65-90.

SAD, L. A.; TEIXEIRA, M. V.; BALDINO, R. R. Cauchy and the problem of point-wise convergence. *Archieves Internationales d'Historie des Sciences*, v. 51. Academie Internationale d'Histoire des Sciences, 2001, p.277-308.

SARAIVA, L. The beginnings of the Royal Military Academy of Rio de Janeiro. *Revista Brasileira de História da Matemática,* v. 7, n. 13. Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2007, p. 19-41.

STRUIK, D. J. *História concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1989.

VIEIRA, G. S. B. O ensino da Matemática nas aulas de Artilharia e Academias Militares (do século XVII ao século XIX). *Acta do I Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, 1993.* Universidade de Coimbra, 2000, p. 9-25.
WUSSING, H. *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Tradução de Mariano Hormigón (diretor) et all. Madri: Siglo Veintiuno, 1998.
YOUSCHEKEVITCH, A. P. J. A. da Cunha et les Fondements de l'analyse Infinitésimale. *Revue d'Histoire des Sciences*, n. 26, 1973, p. 3-22.
YOUSCHEKEVITCH, A. P. The concept of function up to the midlle of the 19th century. *Archive for History of Exact Science*, n. 16, 1976, p. 37-85.

**Lígia Arantes Sad**
Programa de Pós-Graduação em Educação - UFES

**E-mail**: sadli@terra.com.br