Traduções
Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática – Vol. 21, nº 42 – pp. 275–293
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

"DIE LINEALE AUSDEHNUNGSLEHRE" DE H. G. GRASSMANN

Thiago Augusto S. Dourado
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo – IME/USP – Brasil

Dominique Flament
Centre National de la Recherche Scientifique, Université de Lorraine – Nancy – França

Valéria Ostete Jannis Luchetta
Instituto Federal de São Paulo – IFSP – Brasil

César Polcino Milies
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo – IME/USP – Brasil

(aceito para publicação em fevereiro de 2021)

Resumo

Apresentamos aqui uma breve introdução à *Ausdehnungslehre* de Hermann Günther Grassmann, uma das principais obras da matemática do século XIX, sobretudo no seu aspecto fundacional. Expomos uma breve biografia de Grassmann, algumas consequências da obra e o porquê de sua difícil aceitação por parte dos matematicos contemporâneos. Por fim incluímos um trecho em alemão da obra e sua tradução.

Palavras-chave: Matemática, História, Grassmann, *Ausdehnungslehre*.

[H. G. GRASSMANN'S "DIE LINEALE AUSDEHNUNGSLEHRE"]

Abstract

Here we present a brief introduction to Hermann Günther Grassmann's *Ausdehnungslehre*, one of the main works of 19th century mathematics, especially in its foundational aspect. We present a brief biography of Grassmann, some consequences of the work and the reason for its difficult acceptance by contemporary mathematicians. Finally, we include a German excerpt of the work and its translation.

Keywords: Mathematics, History, Grassmann, *Ausdehnungslehre*.

1. Introdução

Historicamente, o cálculo vetorial originou-se de uma tentativa de simplificação dos métodos dos quatérnios introduzidos por *Sir* William Rowan Hamilton (1805–1865) e foi desenvolvido independentemente por Josiah Willard Gibbs (1839–1903) e Oliver Heaviside (1850–1925).

Porém, outro matemático considerou, paralelamente, ideias muito similares.

Hermann Günther Grassmann (1809–1877), que não tinha demonstrado nenhum talento matemático na sua juventude, nem tinha formação universitária em matemática acabou se tornando professor de matemática de nível secundário e desenvolveu suas ideias antes de Hamilton, na sua *"Die lineale Ausdehnungslehre: Ein neuer Zweig der Mathematik* (A Teoria Linear da Extensão: um novo Ramo da Matemática) que só tornou públicas apenas em 1844, um ano depois da descoberta dos quatérnios.

Iniciamos este artigo com uma seção em que incluímos uma breve biografia de Grassmann e, na seção seguinte, alguns comentários sobre a importância e conteúdo da obra em apreço. A seguir apresentamos nossa tradução das duas primeiras seções da Introdução da *Ausdehnungslehre*, em que o autor explicita suas concepções sobre matemática e ciência e, logo em seguida, incluímos as duas seções no seu original alemão.

2. A biografia

Hermann Günther Grassmann nasceu em 15 de abril de 1809, na cidade de Estetino, à época na Prússia Ocidental e na atual Polônia. Seu pai, além de professor, foi um acadêmico de relevância que escreveu vários livros sobre física e matemática, realizou pesquisas sobre cristalografia e era muito versado em filosofia. Hermann foi o terceiro de doze filhos e tanto ele quanto seu irmão Robert se tornaram matemáticos devido à influência do pai.

Recebeu a primeira educação da sua mãe e depois numa escola particular, antes de ingressar no *Gymnasium* onde lecionava o pai.

A partir de 1827, estudou teologia na Universidade de Berlim, e assistiu disciplinas sobre línguas, idiomas e literatura, mas aparentemente não participou de nenhum curso em matemática ou física. Seu pai achava que deveria se dedicar a algum trabalho manual tal como jardineiro ou artesão. Nos anos finais de sua formação, porém, ele se mostrou um bom aluno.

Em 1830 voltou a Estetino e, após um ano de preparação, se submeteu a exames para poder ensinar matemática no ensino médio. As qualificações obtidas apenas o habilitaram para ensinar nos níveis mais elementares. Em 1834 foi aberta uma nova escola, a *Otto Schule*, e Grassmann foi indicado para lá ensinar matemática, física, alemão, latim e estudos religiosos, mas sempre em níveis elementares.

Em 1840 submeteu um ensaio sobre a teoria das marés [4] como parte dos exames da escola *Otto Schule*, na esperança de melhorar seu nível como professor, que só foi publicada postumamente nas suas obras coligidas [8]. Ele se inspirou na teoria básica da *Mécanique céleste* de Laplace e da *Mécanique analytique* de Lagrange, mas percebeu que era capaz de aplicar os métodos vetoriais que vinha desenvolvendo desde 1832 e produzir uma abordagem original e simplificada.

Nesse ensaio de 200 páginas ele introduziu pela primeira vez uma análise baseada em vetores, incluindo adição e subtração de vetores, diferenciação vetorial e uma teoria de funções vetoriais. Embora seu ensaio tenha sido aceito pelos examinadores e ele fosse aprovado, estes não perceberam a importância das inovações que Grassmann tinha introduzido.

Logo depois, entre 1842 e 1843, escreveu seu trabalho principal, *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* [5] que foi publicado no ano seguinte.

Interessado também na linguística, Grassmann fez um esforço para conservar a pureza da língua alemã, livrando-a das palavras de origem latina. Isso, além de sua insistência em questões filosóficas e a pouca clareza de alguns dos seus argumentos tornaram a obra de muito difícil leitura.

O texto não teve a repercussão que ele esperava, nem mesmo entre os matemáticos aos quais ele tinha enviado a obra. Grassmann solicitou então a August Ferdinand Möbius (1790–1868), que tinha trabalhado em assuntos similares, que publicasse uma crítica da obra, mas ele se recusou a fazê-lo. Mais tarde, numa carta dirigida a Ernst Friedrich Apelt (1812–1859) Möbius escreveu:

> “[...] *me parece que uma falsa filosofia da matemática está na base [da obra]. O caráter essencial do conhecimento matemático, a intuição, parece estar completamente banido. Uma tal Ausdehnungslehre ‘abstrata’, tal como ele procurou, poderia ser desenvolvida unicamente a partir de conceitos. Mas a fonte do conhecimento matemático não repousa sobre os conceitos mas sobre a intuição.”*

Em 1846, Möbius convidou Grassmann a participar numa competição para resolver um problema que tinha sido proposto pela primeira vez por Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) e que consistia em desenvolver um método de cálculo geométrico, independente de coordenadas e da métrica (que Leibniz denominara *Analysis situs*). Ele apresentou então um ensaio intitulado *Die Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik*, que resultou vencedor do concurso no qual ele era o único candidato inscrito.

Em 1847, Grassmann solicitou ao Ministério de Educação da Prússia ser considerado para um cargo universitário e o ministério fez requerer a opinião de a Ernst Eduard Kummer (1810–1893). Este, por sua vez, respondeu dizendo que o ensaio continha

"[...] *bom material expressado numa forma deficiente."*

O relatório de Kummer pôs fim a qualquer esperança de Grassmann de obter um posto universitário. O fato de não poder ingressar à docência universitária foi muito frustrante para ele mas não por uma questão financeira. À época o salário de um professor secundário era consideravelmente maior que o de um professor universitário na Alemanha. Porém, teria menos carga didática e, consequentemente, mais tempo para realizar suas pesquisas.

Como citado por Dieudonné [1]:

> *"Em toda a galeria de matemáticos proeminentes que, desde a época dos gregos, deixaram sua marca na ciência, Hermann Grassmann certamente se destaca como o mais excepcional em muitos aspectos* [...] *Quando comparada com as de outros matemáticos, sua carreira é uma sucessão ininterrupta de estranhezas: incomuns eram seus estudos; incomum seu estilo matemático; altamente incomum sua própria compreensão tardia de seu potencial como matemático; incomum e infeliz a total falta de compreensão de suas ideias, não apenas durante sua vida, mas muito depois de sua morte; deplorável a negligência que o obrigou a permanecer por toda a vida professor em uma escola secundária ("Gymnasiallehrer") quando homens deveras inferiores ocupavam cargos na Universidade."*

Em março de 1852, Justus, o pai de Grassmann, faleceu e, nesse mesmo ano, ele foi indicado para ocupar a posição de seu pai no *Gymnasium* de Estetino. Mesmo ainda ensinando numa escola secundária, ele tinha agora o título de "Professor". Dois dos seus filhos, Justus e Max, mais tarde também se tornaram professores do *Gymnasium*.

Desapontado com sua falta de reconhecimento no mundo matemático, Grassmann se voltou a outro dos seus temas favoritos, o estudo do Sânscrito e o Gótico e, durante sua vida, recebeu mais reconhecimento por estes estudos.

Ele escreveu livros sobre a gramática alemã, coletâneas de canções folclóricas, aprendeu sânscrito, escreveu um dicionário de 2000 páginas e uma tradução do Rigveda. Nesta área ele obteve bem mais reconhecimento: foi eleito membro da Sociedade Orientalisata Americana e em 1878 recebeu um doutorado honorário da Universidade de Tübingen. Seu dicionário de sânscrito recebeu uma terceira edição em 1955 e o seu trabalho é ainda citado nos estudos sobre o Rigveda. Uma lei descoberta por ele, sobre sons das línguas Indo-Europeias é ainda conhecida como *lei de Grassmann*.

Ainda voltou à matemática em 1862, ano em que publicou uma segunda edição do *Ausdehnungslehre:* cuidadosamente reescrita, esperando conseguir um maior reconhecimento para a mesma, intitulada *Die Ausdehnungslehre: Vollständig und in strenger Form bearbeitet* [A Teoria da Extensão Completa e Cuidadosamente tratada] (incluída depois em [8]) mas sem melhores resultados do que com a publicação original.

Também estudou problemas de física e, em particular, em 1853 publicou um artigo intitulado *Zur Theorie der Farbenmischung* [Sobre teoria da mistura de cores] em que contrariava a teoria proposta por Hermann von Helmholtz (1821–1894). Neste artigo, ele introduz leis, também conhecidas como *leis de Grassmann* na física.

3. A obra

A *Ausdehnungslehre* pode ser considerada como uma obra-prima de originalidade; nele Grassmann desenvolveu a ideia de uma álgebra na qual os símbolos são entes abstratos a serem manipulados segundo certas regras. Ele próprio defende as vantagens do seu método no prefácio da obra:

> *“Um trabalho sobre a teoria das marés, que empreendi mais tarde, me levou à mecânica analítica de La Grange e por lá novamente a essas ideias de Análise. Graças aos princípios desta nova Análise, os desenvolvimentos desta obra se transformaram numa forma tão simples que, frequentemente, o cálculo foi dez vezes mais curto nesta do que naquela obra. Isso me encorajou a aplicar a nova análise à difícil teoria das marés; foi necessário, para isto, desenvolver muitos novos conceitos e dar-lhes forma na Análise.”*

Ele conclui seu prefácio com uma seção intitulada “Esboço da Teoria Geral das Formas” onde define *ligação simples* de formas (que também chama de magnitudes), conceito que corresponde ao que chamaríamos “operação”. Discutindo as propriedades das operações menciona a associatividade, embora não na linguagem atual, e antecipa a possibilidade de sistemas não comutativos. Introduz também o conceito de dependência linear de forma surpreendentemente similar à utilizada hoje em dia. Usa a expressão “soma múltipla” para designar o que hoje chamaríamos de “combinação linear”, no início do segundo capítulo, escreve:

> *“Nós dizemos que uma magnitude elementar dependente de outras magnitudes elementares se ela pode-se representar como soma múltipla destas, por outro lado dizemos que várias magnitudes elementares são independentes se não há entre elas relação de dependência no sentido indicado; isto é, nenhuma entre elas pode-se representar como soma múltipla das outras.”*

Logo em seguida define o que hoje chamaríamos espaço vetorial de dimensão *n* que ele chama de *sistema elementar de n-ésimo escalão*:

> *“Agora nós entendemos por sistema elementar de n-ésimo escalão a totalidade dos elementos que são dependentes de n elementos, desde que esses* n *elementos sejam independentes uns dos outros.”*

E, posteriormente, define ideias correspondentes ao que, na linguagem atual, descreveríamos como subespaço gerado por elementos dados, soma e interseção de subespaços, e a projeção de um elemento sobre um subespaço. Mostra também que todo conjunto de elementos contém um subconjunto independente que gera o mesmo subespaço e que todo conjunto independente pode se estender a uma base. Ainda, ele prova a hoje conhecida identidade

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

Bibliografia

DIEUDONNÉ, Jean. 1979. The Tragedy of Grassmann, *Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, no. 2, 1–14.

FLAMENT, Dominique. 1994. *Hermann Günther Grassmann, La Science de la Grandeur Extensive*, Librairie Scientifique et Technique, Paris.

FLAMENT, Dominique. 1992. *La "lineale Ausdehnungslehre" (1844) de Hermann Günther Grassmann*, in *A Century of Geometry, 1830-1930*, *Lectures Notes in Physics*, 402, 205–221.

GRASSMANN, Hermann. 1840. *Theorie der Ebbe und Flut*, dissertação.

GRASSMANN, Hermann. 1844. *Die Lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik*, Otto Wigand, Leipzig.

GRASSMANN, Hermann. 1855. Sur les différents genres de multiplication, *Crelle's Journal*, 49, 123–141.

GRASSMANN, Hermann. 1861. *Lehrbuch der Arithmetik*, Berlin.

GRASSMANN, Hermann. 1894–1911. *Gesammelte Mathematische und Physikalische Werke*, 3 volumes em 6 partes, Leipzig.

Thiago Augusto Silva Dourado
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo – IME/USP – São Paulo – Brasil

E-mail: thiago.dourado@ime.usp.br

Dominique Flament
Centre National de la Recherche Scientifique, Université de Lorraine – Nancy – França

E-mail: dominique.flament@univ-lorraine.fr

Valéria Ostete Jannis Luchetta
Instituto Federal de São Paulo – IFSP – São Paulo – Brasil

E-mail: valeria@ifsp.edu.br

César Polcino Milies
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo – IME/USP – São Paulo – Brasil

E-mail: polcino@ime.usp.br

4. Tradução de um trecho da Introdução

A. Dedução do Conceito da Matemática Pura.

1. A divisão mais elevada de todas as ciências é entre as ciências reais e as ciências formais. As primeiras figuram o ser no pensamento, um ser ele mesmo independente desse pensamento, e sua verdade é dada pela concordância do pensamento com este ser; as segundas, entretanto, tem por objeto esse que é estabelecido pelo próprio pensamento, e sua verdade é dada pela concordância entre os processos do pensamento.

> O pensamento só existe em relação à um ser que é confrontado e que é representado por ele; mas, para as ciências reais este ser é independente, existe por si mesmo fora do pensamento; ao passo que para as ciências formais, ele é posto pelo pensamento que entretanto confronta a si mesmo, por sua vez, enquanto ser, num segundo ato do pensamento. Se neste momento, a verdade, enquanto tal, repousa sobre a concordância do pensamento com o ser, ela o faz, em particular, para as ciências formais sobre uma concordância do segundo ato do pensamento com o ser posto pelo primeiro ato, isto é, sobre a concordância dos dois atos do pensamento.

> Assim, nas ciências formais, a demonstração não transcende o próprio pensamento a outra esfera, mas se mantém puramente na combinação dos diversos atos do pensamento. Por esta razão, as ciências formais não deve partir dos axiomas como fazem as ciências reais; mas são as definições que constituem seus fundamentos[1].

2. As ciências formais examinam seja as leis *gerais* do pensamento, seja o *particular* posto pelo pensamento; a primeira é a dialética (lógica), a segunda a matemática pura.

> O contraste entre o geral e o particular exige então a divisão das ciências formais em dialética e matemática. A primeira, por sua procura da unidade em todo pensamento, é uma ciência filosófica; no entanto, a matemática segue uma direção oposta tomando por particular tudo que é um pensamento isolado.

3. Por consequência, a matemática pura é a ciência do *ser particular* enquanto nascido do *pensamento*. Chamamos o ser particular, tomado nesse sentido, uma forma de pensamento ou simplesmente uma forma. Assim, a matemática pura é a *teoria das formas.*

> O nome teoria das magnitudes não convém ao conjunto das matemáticas, porque este não se aplica a teoria das combinações, um ramo essencial das matemáticas, e só se aplica no sentido figurado à aritmética[2]. No entanto, a expressão forma parece, por sua vez, ser muito ampla, e o nome forma de pensamento parece ser melhor fundamentada; mas a forma em seu significado puro, fazendo abstração de todo conteúdo real, não é a forma do pensamento, e portanto, a expressão convém. Antes de passar à divisão da teoria das formas, se deve excluir um ramo que se incluiu indevidamente, a saber, a geometria. Já, segundo o conceito estabelecido acima, é evidente que a geometria, bem como a mecânica, se refere à um ser real; na geometria é de fato o espaço, e é claro que o conceito de espaço não pode de forma alguma ser gerado pelo pensamento, mas é sempre um ser dado. Qualquer um que sustentasse o contrário deveria submeter-se a tarefa de deduzir das leis puras do pensamento a necessidade das três dimensões do espaço; uma tarefa cujo resultado se revela imediatamente impossível. Se, aceitando isto, qualquer um quisesse, por amor

[1] Se não obstante, se introduziram axiomas nas ciências formais, como por exemplo, na aritmética, então isto deve ser considerado como um abuso que só pode ser explicado pelo tratamento correspondente em geometria. Voltarei a isto ainda uma vez mais tarde. Aqui deve ser suficiente ter colocado em evidência o fato de que a ausência de axiomas nas ciências formais é necessário.

[2] O conceito de magnitude é substituído em aritmética por aquele de número; eis porque a língua distingue bem entre aumentar e diminuir, que pertence ao número, e entre agrandar e reduzir que pertence a magnitude.

a geometria, lhe estender o nome da matemática, nós o aceitaríamos se da sua parte ele aceitasse nosso nome de teoria das formas ou qualquer outro equivalente; mas nós deveríamos antecipadamente o fazer saber que este nome será necessariamente rejeitado no fim como supérfluo porque ele reúne as coisas mais diferentes. O lugar da geometria perante a teoria das formas depende da relação da intuição do espaço com o pensamento puro. Bem que nós dizíamos que uma tal intuição faz face ao pensamento de uma maneira independente, nós não temos afirmado portanto que a intuição do espaço só nos vem da contemplação das coisa espaciais; mas é uma intuição fundamental que nos é dada *a priori* pelo fato que nosso sentido está aberto ao mundo sensível e que nos é originalmente inerente da mesma maneira que o corpo o é à alma. É o mesmo com o tempo e o movimento que está fundamentado sobre as intuições do tempo e do espaço; portanto, se incluído com o mesmo direito que a geometria à teoria pura do movimento (Phorometria) nas ciências matemáticas. Mediante o contraste de causa e efeito o conceito de força que movimenta decorre da intuição do movimento. Assim, geometria, phorometria e mecânica se apresentam como aplicações da teoria das formas as intuições fundamentais do mundo sensível.

B. Dedução do Conceito da Teoria da Extensão.

4. Tudo que veio a ser pensamento (*cf.* No. 3) pode ter-lo sido de duas maneiras: seja por um *ato* simples *gerador*, seja por um ato duplo de *colocação* e de *ligação*. Tudo o que veio a ser da primeira maneira é a *forma contínua* ou a *magnitude* em sentido mais estreito; o que veio a ser da segunda maneira é a *forma discreta* ou *forma-ligação*.

O conceito absolutamente simples de vir a ser dá a forma contínua. É verdade que o que é colocado pela forma discreta antes da ligação é também colocado pelo pensamento, mas parece para o ato de ligação como alguma coisa dada e a maneira pela qual a forma discreta vem a ser algo já dado é uma maneira simples de pensar duas coisas juntas. O conceito de vir a ser contínuo é mais facilmente compreendido se o se considera segundo a analogia com a maneira discreta de vir a ser que é mais familiar. A saber, porque aquilo que cada vez veio a ser, com a gênese do contínuo, é fixado e porque o que é se forma novamente, desde o momento de sua formação, pensado junto com aquele: assim, pode-se também, tendo em conta a analogia, distinguir *conceitualmente* um duplo ato de colocação e de ligação pela forma contínua, mas desta vez os

> dois atos estão unidos em um único ato e eles constituem desta maneira uma unidade indissociável; a saber, dos dois membros da ligação (se mantém, por enquanto, essa expressão por causa da analogia) um é aquele que já veio a ser, enquanto o outro é aquele que se forma novamente no momento da própria ligação, logo ele não está acabado antes da ligação. Os dois atos, aquele da colocação e o da ligação, se fundem então totalmente um no outro, de modo que não se pode ligar antes de haver colocado e não se pode colocar antes de haver ligado; ou se fala segundo a maneira que é própria do contínuo: o que se forma novamente o faz somente tendo em conta aquilo que já veio a ser, e é então um momento do próprio vir a ser, aquilo que aqui se apresenta se desenvolvido como crescimento.
>
> O contraste entre discreto e contínuo é fluído (como todos os verdadeiros contrastes) uma vez que o discreto pode ser considerado como contínuo e vice-versa, o contínuo como discreto. O discreto é considerado como contínuo se aquilo que é ligado é entendido, por sua vez, como algo que veio a ser e se o ato de ligação é entendido como um momento do vir a ser. E o contínuo é considerado como discreto se os momentos singulares do vir a ser forem entendidos como atos puros de ligação e se o que está ligado dessa maneira é considerado como algo dado pela ligação.

5. Cada particular (No. 3) torna-se tal pelo conceito do *distinto*, pelo qual ele é coordenado a outro particular, e pelo conceito de *igual*, pelo qual ele é subordinado com outros particulares a um geral comum. Podemos chamar de *forma algébrica* o que veio a ser pelo igual e *forma combinatória* o que veio a ser pelo distinto.

> O contraste entre o igual e o distinto é também fluído. O igual é distinto, já porque o um e o outro que são iguais a isto são separados de alguma maneira (e sem esta separação seria apenas Um, então nada de igual); o distinto é igual, já porque os dois estão ligados pela atividade que se refere a ambos, donde ambos são coisas relacionadas. Não obstante, os dois membros não se confundem de modo algum, de modo que ela deverá aplicar uma medida pela qual se determinar quanto do igual e quanto do distinto seria colocado nas duas ideias; mas mesmo se é verdade que o distinto permanece sempre ligado ao igual de alguma forma, e reciprocamente, é cada vez aquele que forma o momento da contemplação, enquanto o outro não só se apresenta como a base a ser pressuposta para o primeiro.
>
> Aqui temos na forma algébrica não apenas o número incluído mas também aquilo que corresponde ao número no domínio do contínuo e, na forma combinatória, incluímos não

> apenas a combinação, mas também aquilo que a corresponde a ela no domínio do contínuo.

6. Do cruzamento desses dois contrastes, em que o primeiro se relaciona com a maneira de gerar e o segundo com os elementos gerados, resulta dos quatro tipos de formas e dos ramos da teoria das formas a que correspondem. A saber, a forma discreta se separa em primeiro lugar em número e combinação (Aquilo que é ligado). O *número* é a forma algébrica discreta, ou seja, ele é a reunião do que é colocado como igual; a *combinação* é a forma combinatória discreta, ou seja, ela é a reunião do que é colocado como distinto. As ciências do discreto são então a *teoria dos números* e a *teoria das combinações* (teoria das ligações).

> Não há necessidade de qualquer outra evidência para mostrar que o conceito de número é, portanto, completamente exaurido e exatamente circunscrito, e assim também para o conceito de combinação. E como os contrastes dos quais essas definições resultaram são os mais simples e imediatamente dados no conceito de forma matemática, a dedução acima mencionada parece, assim, suficientemente justificada[3]. Eu observo novamente como o contraste entre as duas formas é expressa de uma forma muito pura por uma designação diferente de seus elementos: o que é associado em um número é designado por um único signo (1), o que é ligado em uma combinação é designado por signos diferentes que, de outra maneira, são totalmente arbitrários (as letras). Como, é necessário compreender agora cada conjunto de coisas (particularidades) como número bem como uma combinação, de acordo com as diferentes maneiras de considerá-los, dificilmente precisam ser mencionadas.

7. Da mesma maneira, a forma contínua ou magnitude se separa em forma algébrica-contínua ou *magnitude intensiva* e em forma combinatória-contínua ou *magnitude extensiva*. A magnitude intensiva é assim o que veio a ser pela geração do igual; a magnitude extensiva ou *extensão* é o que veio a ser pela geração do distinto. Aquele constitui enquanto magnitude variável a base da Teoria das funções, do cálculo diferencial e integral; este constitui a base da *Ausdehnungslehre*.

> Como de costume ocorre que se subordina o primeiro destes dois ramos à *teoria dos números* tomada como ramo superior, a segunda entretanto sendo um ramo até agora desconhecido, é então necessário explicar mais em detalhe essa consideração tomada difícil pelo conceito de fluxo (deslocamento) contínuo. Como a unificação resulta no número

[3] O conceito de número e combinação já foi desenvolvido de maneira inteiramente semelhante há dezessete anos atrás, no tratado de meu pai sobre o conceito da teoria dos números puros, impresso no programa de 1827 do instituto de Estetino, mas sem chegar ao conhecimento de um público mais amplo.

e como a separação do que é pensado junto aparece na combinação, assim também resulta na magnitude intensiva a unificação dos elementos que, é verdade, estão ainda separados conceitualmente, mas que só formam a magnitude intensiva sendo essencialmente iguais entre si; no entanto na magnitude extensiva há separação dos elementos que são, certamente, unidos enquanto formam uma magnitude, mas só constitui esta magnitude por sua separação mútua. A magnitude intensiva é então, por assim dizer, o número fundido; a magnitude extensiva é a combinação fundida. A dispersão dos elementos é essencial à magnitude extensiva assim como o é a fixação dessa magnitude como sendo separado; o elemento gerador se apresenta aqui como qualquer coisa que se muda, isto é, como qualquer coisa que atravessa uma diversidade de estados, e o conjunto destes estados diferentes constitui precisamente o domínio da magnitude da extensão. Porém, pela magnitude intensiva é sua geração que fornece uma série contínua de estados que se mantém iguais entre si e onde a quantidade é precisamente a magnitude intensiva. Como exemplo para a magnitude extensiva, ou melhor é aquela de uma linha finita (Strecke) onde os elementos são por essência dispersados e é precisamente da forma que eles constituem a linha como extensão. Como exemplo de magnitude intensiva pode se tomar um ponto munido de uma certa força, porque aqui os elementos não se separam mas representam-se apenas no crescimento, eles formam assim um certo escalão do crescimento.

Aqui também a diferença colocada se mostra lindamente pela forma de designar; isto é, para a magnitude intensiva que constitui o objeto da teoria das funções, não se distingue os elementos por signos particulares, mas lá onde aparecem os signos particulares se designa assim toda a magnitude variável. No entanto, para a magnitude de extensão, ou para a sua representação concreta, a linha, os elementos diferentes são também designados por signos diferentes (as letras), exatamente como na teoria das combinações. Também, é claro como toda magnitude real pode ser vista de uma dupla maneira, como intensiva e extensiva; a saber, a linha é também vista como magnitude intensiva se fizer abstração da maneira em que seus elementos são separados e se não se toma mais que a quantidade dos elementos, e de modo análogo, o ponto munido de uma força pode ser pensado como magnitude extensiva imaginando a força sob a forma de uma linha.

Entre os quatro ramos das matemáticas é historicamente o discreto que é desenvolvido antes do contínuo (porque aquele está mais próximo do espírito analisante que este); o algébrico foi desenvolvido antes do combinatório (porque o igual é mais facilmente reunido que o distinto). A teoria dos números é por isso a mais antiga, a teoria das combinações e o cálculo diferencial são nascidas ao mesmo tempo, e de todos os ramos é a *Ausdehnungslehre* em sua forma abstrata que deveria ser a última enquanto que sua imagem concreta (embora restrita), a teoria do espaço, pertencia já ao tempo mais antigo.

8. A separação em quatro ramos da teoria das formas pode ser precedida por uma parte geral. Essa parte apresenta as leis gerais de ligação; isto é, as leis que se aplicam igualmente a todos os ramos; podemos chama-la de teoria geral das formas.

É essencial iniciar com essa parte, antes de tudo, porque isso nos evita repetir as mesmas conclusões nos quatro ramos, ou mesmo em seções diferentes de um mesmo ramo, desta forma o desenvolvimento será muito abreviado, mas assim também tudo o que por sua essência é reunido, se apresentará reunido como fundamento de todo.

5. Original alemão

A. Ableitung des Begriffs der reinen Mathematik.

1. Die oberste Theilung aller Wissenschaften ist die in reale und formale, von denen die ersteren das Sein, als das dem Denken selbstständig gegenübertretende, im Denken abbilden, und ihre Wahrheit haben in der Uebereinstimmung des Denkens mit jenem Sein; die letzteren hingegen das durch das Denken selbst gesetzte zum Gegenstande haben, und ihre Wahrheit haben in der Uebereinstimmung der Denkprocesse unter sich.

Denken ist nur in Bezug auf ein Sein, was ihm gegenübertritt und durch das Denken abgebildet wird; aber dies Sein ist bei den realen Wissenschaften ein selbstständiges, ausserhalb des Denkens für sich bestehendes, bei den formalen hingegen ein durch das Denken selbst gesetztes, was nun wieder einem zweiten Denkakte als Sein sich gegenüberstellt. Wenn nun die Wahrheit überhaupt in der Uebereinstimmung des Denkens mit dem Sein beruht, so beruht sie insbesondere bei den formalen Wissenschaften in der Uebereinstimmung des zweiten Denkaktes mit dem durch den ersten gesetzten Sein, also in der Uebereinstimmung beider Denkakte. Der Beweis in den formalen Wissenschaften geht daher nicht über das Denken

> selbst hinaus in eine andere Sphäre über, sondern verharrt rein in der Kombination der verschiedenen Denkakte. Daher dürfen auch die formalen Wissenschaften nicht von Grundsätzen ausgehen, wie die realen; sondern ihre Grundlage bilden die Definitionen[4].

2. Die formalen Wissenschaften betrachten entweder die allgemeinen Gesetze des Denkens, oder sie betrachten das Besondere durch das Denken gesetzte, ersteres die Dialektik (Logik), letzteres die reine Mathematik.

> Der Gegensatz zwischen Allgemeinem und Besonderem bedingt also die Theilung der formalen Wissenschaften in Dialektik und Mathematik. Die erstere ist eine philosophische Wissenschaft, indem sie die Einheit in allem Denken auf-sucht, die Mathematik hingegen hat die entgegengesetzte Richtung, indem sie jedes Gedachte einzeln als ein Besonderes auffasst.

3. Die reine Mathematik ist daher die Wissenschaft des besonderen Seins als eines durch das Denken gewordenen. Das besondere Sein, in diesem Sinne aufgefasst, nennen wir eine Denkform oder schlechtweg eine Form. Daher ist reine Mathematik Formenlehre.

> Der Name Grossenlehre eignet nicht der gesammten Mathematik, indem derselbe auf einen wesentlichen Zweig derselben, auf die Kombinationslehre, keine Anwendung findet, und auf die Arithmetik auch nur im uneigentlichen Sinne[5]. Dagegen scheint der Ausdruck Form wieder zu weit zu sein, und der Name Denkform angemessener; allein die Form in ihrer reinen Bedeutung, abstrahirt von allem realen Inhalte, ist eben nichts anderes, als die Denkform, und somit der Ausdruck entsprechend. Ehe wir zur Theilung der Formenlehre übergehen, haben wir einen Zweig auszusondern, den man bisher mit Unrecht ihr zugerechnet hat, nämlich die Geometrie. Schon aus dem oben aufgestellten Begriffe leuchtet ein, dass die Geometrie, eben so wie die Mechanik, auf ein reales Denken erzeugt werden kann, sondern demselben stets als ein gegebenes gegenübertritt. Wer das Gegentheil behaupten wollte, müsste sich der Aufgabe unterziehen, die Nothwendigkeit der drei Dimensionen des Raumes aus den reinen Denkgesetzen abzuleiten, eine Aufgabe, deren Lösung

---

[4] Wenn man in die formalen Wissenschaften, wie z. B. in die Arithmetik, dennoch Grundsätze eingeführt hat, so ist dies als ein Missbrauch anzusehen, der nur aus der entsprechenden Behandlung der Geometrie zu erklären ist. Ich werde hierauf später noch einmal ausführlicher zurückkommen. Hier genüge es, das Fehlen der Grundsätze in den formalen Wissenschaften als nothwendig dargethan zu haben.

[5] Der Begriff der Grösse wird in der Arithmetik durch den der Anzahl vertreten; die Sprache unterscheidet daher sehr wohl vermehren und vermindern, was der Zahl angehört, von vergrössern und verkleinern, was der Grösse.

sich sogleich als unmöglich darstellt. — Wollte nun jemand, obgleich er dies zugeben müsste, dennoch der Geometrie zu Liebe den Namen der Mathematik auch auf sie ausdehnen; so könnten wir uns dies zwar gefallen lassen, wenn er uns auch auf der anderen Seite unsern Namen der Formenlehre oder irgend einen gleichgeltenden will stehen lassen; doch aber müssten wir ihn im Voraus darauf hinweisen, dass dann jener Name, weil er das differenteste in sich schliesst, auch nothwendig mit der Zeit als überflüssig werde verworfen werden. Die Stellung der Geometrie zur Formenlehre hangt von dem Verhältniss ab, in welchem die Anschauung des Raumes zum reinen Denken steht. Wenn gleich wir nun sagten, es trete jene Anschauung dem Denken als selbstständig gegebenes gegenüber, so ist damit doch nicht behauptet, dass die Anschauung des Raumes uns erst aus der Betrachtung der räumlchen Dinge würde ; sondern sie ist eine Grundanschauung, die mit dem Geöffnetsein unseres Sinnes für die sinnliche Welt uns mitgegeben ist, und die uns eben so ursprünglich anhaftet, wie der Leib der Seele. Auf gleiche Weise verhält es sich mit der Zeit und mit der auf die Anschauungen der Zeit und des Raumes gegründeten Bewegung, weshalb man auch die reine Bewegungslehre (Phorometrie) mit gleichem Rechte wie die Geometrie den mathematischen Wissenschaften beigezählt hat. Aus der Anschauung der Bewegung fliesst vermittelst des Gegensatzes von Ursache und Wirkung der Begriff der bewegenden Kraft, so dass also Geometrie, Phorometrie und Mechanik als Anwendungen der Formenlehre auf die Grundanschauungen der sinnlichen Welt erscheinen.

B. Ableitung des Begriffs der Ausdehnungslehre.

4. Jedes durch das Denken gewordene (vergl. No. 3) kann auf zwiefache Weise geworden sein, entweder durch einen einfachen Akt des E r z e u g e n s , oder durch einen zwiefachen Akt des S e t z e n s und V e r k n ü p f e n s . Das auf die erste Weise gewordene ist die s t e t i g e F o r m oder die G r ö s s e im engeren Sinn, das auf die letztere Weise gewordene die d i s k r e t e oder Verknüpfungs-F o r m .

Der schlechthin einfache Begriff des Werdens giebt die stetige Form. Das bei der diskreten Form vor der Verknüpfung gesetzte ist zwar auch durch das Denken gesetzt, erscheint aber für den Akt des Verknüpfens als Gegebenes, und die Art, wie aus dem Gegebenen die diskrete Form wird, ist ein blosses Zusammendenken. Der Begriff des stetigen Werdens ist am leichtesten aufzufassen, wenn man ihn zuerst nach der

> Analogie der geläufigeren, diskreten Entstehungsweise betrachtet. Nämlich da bei der stetigen Erzeugung das jedesmal gewordene festgehalten, und das neu entstehende sogleich in dem Momente seines Entstehens mit jenem zusammengedacht wird: so kann man der Analogie wegen auch für die stetige Form dem Begriffe nach einen zwiefachen Akt des Setzens und Verknüpfens unterscheiden, aber beides hier zu Einem Akte vereinigt, und somit in eine unzertrennliche Einheit zusammengehend; nämlich von den beiden Gliedern der Verknüpfung (wenn wir diesen Ausdruck der Analogie wegen für einen Augenblick festhalten) ist das eine das schon gewordene, das andere hingegen das in dem Momente des Verknüpfens selbst neu entstehende, also nicht ein vor dem Verknüpfen schon fertiges. Beide Akte also, nämlich des Setzens und Verknüpfens, gehen ganz in einander auf, so dass nicht verknüpft werden kann, als gesetzt ist, und nicht eher gesetzt werden darf, als verknüpft ist; oder wieder in der dem Stetigen zukommenden Ausdrucksweise gesprochen: das was neu entsteht, entsteht eben nur an dem schon gewordenen, ist also ein Moment des Werdens selbst, was hier in seinem weiteren Verlauf als Wachsen erscheint.
>
> Der Gegensatz des Diskreten und Stetigen ist (wie alle wahren Gegensätze) ein fliessender, indem das Diskrete auch kann als stetig betrachtet werden, und umgekehrt das Stetige als Diskret. Das Diskrete wird als Stetiges betrachtet, wenn das Verknüpfte selbst wieder als Gewordenes und der Akt des Verknüpfens als ein Moment des Werdens aufgefasst wird. Und das Stetige wird als Diskret betrachtet, wenn einzelne Momente des Werdens als blosse Verknüpfungsakte aufgefasst, und das so verknüpfte für die Verknüpfung als Gregebenes betrachtet wird.

5. Jedes Besondere (Nr. 3) wird ein solches durch den Begriff des Verschiedenen, wodurch es einem anderen Besonderen nebengeordnet, und durch den des Gleichen, wodurch es mit anderem Besonderen demselben Allgemeinen untergeordnet wird. Das aus dem Gleichen gewordene können wir die algebraische Form, das aus dem Verschiedenen gewordene die kombinatorische Form nennen.

> Der Gegensatz des Gleichen und Verschiedenen ist gleichfalls ein fliessender. Das Gleiche ist verschieden, schon sofern das eine und das andere ihm Gleiche irgend wie gesondert ist (und ohne diese Sonderung wäre es nur Eins, also nicht Gleiches), das Verschiedene ist gleich, schon sofern beides durch die auf beides sich beziehende Thätigkeit verknüpft ist, also beides ein Verknüpftes ist. Darum

> verschwimmen aber nun beide Glieder keineswegs in einander, so dass man einen Maassstab anzulegen hätte, durch den bestimmt würde, wie viel Gleiches gesetzt sei zwischen beiden Vorstellungen und wie viel Verschiedenes; sondern wenn auch dme Gleichen immer schon irgend wie das Verschiedene anhaftet und umgekehrt, so bildet doch nur jedesmal das Eine das Moment der Betrachtung, während das andere nur als die vorauszusetzende Grundlage des ersteren erscheint.
>
> Unter der algebraischen Form ist hier nicht bloss die Zahl sondern auch das der Zahl im Gebiete des Stetigen entsprechende, und unter der kombinatorischen Form nicht nur die Kombination sondern auch das ihr im Stetigen entsprechende verstanden.

6. Aus der Durchkreuzung dieser beiden Gegensätze, von denen der erstere auf die Art der Erzeugung, der letztere auf die Elemente der Erzeugung sich bezieht, gehen die vier Gattungen der Formen und die ihnen entsprechenden Zweige der Formenlehre hervor. Und zwar sondert sich zuerst die diskrete Form danach in Zahl und Kombination (Gebinde). Z a h l ist die algebraisch diskrete Form, d. h. sie ist die Zusammenfassung des als gleichgesetzten; die K o m b i n a t i o n ist die kombinatorisch diskrete Form, d. h. sie ist die Zusammenfassung des als verschieden gesetzten. Die Wissenschaften des Diskreten sind also Z a h l e n l e h r e und K o m b i n a t i o n s l e h r e (Verbindungslehre).

> Dass hierdurch der Begriff der Zahl vollständig erschöpft und genau umgränzt ist, und ebenso der der Kombination, bedarf wohl kaum eines weiteren Nachweises. Und da die Gegensätze, durch welche diese Definitionen hervorgegangen sind, die einfachsten, in dem Begriffe der mathematischen Form unmittelbar mit gegebenen sind, so ist hierdurch die obige Ableitung wohl hinlänglich gerechtfertigt[6]. Ich bemerke nur noch, wie dieser Gegensatz zwischen beiden Formen auf eine sehr reine Weise durch die differente Bezeichnung ihrer Elemente ausgedrückt ist, indem das zur Zahl verknüpfte mit einem und demselben Zeichen (1) bezeichnet wird, das zur Kombination verknüpfte mit verschiedenen, im Uebrigen ganz willkührlichen Zeichen (den Buchstaben). — Wie nun hiernach jede Menge von Dingen (Besonderheiten) als Zahl so gut, wie als Kombination aufgefasst werden kann, je nach der verschiedenen Betrachtungsweise, bedarf wohl kaum einer Erwähnung.

[6] Der Begriff der Zahl und der Kombination ist schon vor 17 Jahren in einer von meinem Vater verfassten Abhandlung, über den Begriff der reinen Zahlenlehre, welche in dem Programme des Stettiner Gymnasiums von 1827 abgedruckt ist, auf ganz ähnliche Weise entwickelt worden, ohne aber zur Kenntniss eines grösseren Publikum gelangt zu sein.

7. Eben so sondert sich die stetige Form oder die Grösse danach in die algebraisch-stetige Form oder die intensive Grösse, und in die kombinatorisch-stetige Form oder die extensive Grösse. Die intensive Grösse ist also das durch Erzeugung des Gleichen gewordene, die extensive Grösse oder die Ausdehnung ist das durch Erzeugung des Verschiedenen gewordene. Jene bildet als veränderliche Grösse die Grundlage der Funktionenlehre, der Differenzial- und Integral-Rechnung, diese die Grundlage der Ausdehnungslehre.

Da von diesen beiden Zweigen der erstere der Zahlenlehre als höherer Zweig untergeordnet zu werden pflegt, der letztere aber noch als ein bisher unbekannter Zweig erscheint, so ist es nothwendig, diese ohnehin durch den Begriff des stetigen Fliessens schwierige Betrachtung naher zu erläutern. Wie in der Zahl die Einigung hervortritt, in der Kombination die Sonderung des Zusammengedachten, so auch in der intensiven Grösse die Einigung der Elemente, welche ihrem Begriff nach zwar noch gesondert sind, aber nur in ihrem wesentlichen sich gleich sein die intensive Grösse bilden, hingegen in der extensiven Grösse die Sonderung der Elemente, welche zwar, sofern sie Eine Grösse bilden, vereinigt sind, aber welche eben nur in ihrer Trennung von einander die Grösse konstituiren. Es ist also die intensive Grösse gleichsam die flüssig gewordene Zahl, die extensive Grösse die flüssig gewordene Kombination. Der letzteren ist wesentlich ein Auseinandertreten der Elemente und ein Festhalten derselben als aus einander seiender; das erzeugende Element erscheint bei ihr als ein sich änderndes, d. h. durch eine Verschiedenheit der Zustände hindurchgehendes, und die Gesammtheit dieser verschiedenen Zustände bildet eben das Gebiet der Ausdehnungsgrösse. Bei der intensiven Grösse hingegen liefert die Erzeugung derselben eine stetige Reihe sich selbst gleicher Zustände, deren Quantität eben die intensive Grösse ist. Als Beispiel für die extensive Grösse können wir am besten die begränzte Linie (Strecke) wählen, deren Elemente wesentlich aus einander treten und dadurch eben die Linie als Ausdehnung konstituiren; hingegen als Beispiel der intensiven Grösse etwa einen mit bestimmter Kraft begabten Punkt, indem hier die Elemente nicht sich entäussern, sondern nur in der Steigerung sich darstellen, also eine bestimmte Stufe der Steigerung bilden.

Auch hier zeigt sich die aufgestellte Differenz auf eine schöne Weise in der Bezeichnung; nämlich bei der intensiven Grösse, welche den Gegenstand der Funktionenlehre ausmacht, unterscheidet man nicht die Elemente durch besondere Zeichen, sondern wo besondere Zeichen hervortreten, da ist dadurch die ganze veränderliche Grösse bezeichnet. Hingegen bei der Ausdehnungsgrösse, oder deren konkreter Darstellung, der Linie, werden die verschiedenen Elemente auch mit verschiedenen Zeichen (den Buchstaben) bezeichnet, grade wie in der Kombinationslehre. Auch ist klar, wie jede reale Grösse auf zwiefache Weise kann angeschaut werden, als intensive und extensive; nämlich auch die Linie wird als intensive Grösse angeschaut, wenn man von der Art, wie ihre Elemente aus einander sind, absieht, und blos die Quantität der Elemente auffasst, und eben so kann der mit einer Kraft begabte Punkt als extensive Grösse gedacht werden, indem man sich die Kraft in Form einer Linie vorstellt.

Historisch hat sich unter den vier Zweigen der Mathematik das Diskrete eher entwickelt als das Stetige (da jenes dem zergliedernden Verstände näher liegt als dieses), das Algebraische eher als das Kombinatorische (da das Gleiche leichter zusammengefasst wird als das Verschiedene). Daher ist die Zahlenlehre die früheste, Kombinationslehre und Differenzialrechnung sind gleichzeitig entstanden, und von ihnen allen musste die Ausdehnungslehre in ihrer abstrakten Form die späteste sein, während auf der andern Seite ihr konkretes (obwohl beschränktes) Abbild, die Baumlehre, schon der frühesten Zeit angehört.

8. Es kann der Zerspaltung der Formenlehre in die vier Zweige ein allgemeiner Theil vorangeschickt werden, welcher die allgemeinen, d. h. für alle Zweige gleich anwendbaren Verknüpfungsgesetze darstellt, und welchen wir die allgemeine Formenlehre nennen können.

Diesen Theil dem Ganzen vorauszuschicken, ist wesentlich, sofern dadurch nicht blos die Wiederholung derselben Schlussreihen in allen vier Zweigen und selbst in den verschiedenen Abtheilungen desselben Zweiges erspart, und somit die Entwickelung bedeutend abgekürzt wird, sondern auch das dem Wesen nach zusammengehörige zusammen erscheint, und als Grundlage des Ganzen auftritt.