Traduções
Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática – Vol. 21, nº 42 – pp. 294–328
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

AS NOTAS DE AULA DE KARL WEIERSTRASS EM 1878

Circe Mary Silva da Silva
Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) – Pelotas – Brasil

Resumo

O objetivo do presente estudo é apresentar a tradução de parte das notas de aula de Karl Weierstrass (1829–1897), editadas com o título *Einleitung in die Theorie der Analytische Funktionen – Vorlesung* 1878 [Introdução à teoria das funções analíticas – Aulas 1878]**,** com o propósito de mostrar como o ensino das funções analíticas e, em especial, a definição de função contínua foi apresentada por esse matemático, na Universidade de Berlin, aos seus alunos. Neste texto, usamos como referência básica o livro que contém as notas de aulas da disciplina, compiladas por Adolf Hurwitz, em 1878, retrabalhadas por Peter Ullrich e publicadas pela Deutsche Mathematiker – Vereneigung [Sociedade Alemã de Matemática], em 1988. A importância, para a História da Educação Matemática, da recompilação de tais notas reside em mostrar o que Weierstrass ensinava e como ele ensinava em suas aulas.

Palavras-Chave: história da matemática, função contínua, análise matemática

[KARL WEIERSTRASS'S LECTURE NOTES IN 1878]

Abstract

The aim of this study is to present the translation of part of the lecture notes by Karl Weierstrass (1829–1897), edited under the title *Einleitung in die Theorie der Analytische Funktionen* – Vorlesung 1878 [Introduction to the theory of analytic functions – Lectures 1878], with the purpose of showing how the teaching of analytic functions and, in particular, the definition of continuous function, was presented by this mathematician, at the University of Berlin, to his students. In this text, we use as a basic reference the book that contains the lecture notes of the discipline, compiled by Adolf Hurwitz, in 1878, reworked by Peter Ullrich and published by the Deutsche Mathematiker-Vereneigung [German Mathematics Society], in 1988. The importance, for the History of Mathematics

Education, the compilation of such notes lies in showing what Weierstrass taught and how he taught in his classes.

Keywords: history of mathematics, continuous function, mathematical analysis

Introdução

No ensino atual de cálculo diferencial e integral nos cursos de ciências exatas, conceitos básicos, como os de limite e continuidade, em geral são apresentados sem referência à sua história. Definições importantes na construção do conhecimento matemático surgem para os alunos como um saber pronto, quase como postulados de consenso.

Há professores que optam por iniciar o ensino de tais conceitos mediante a definição intuitiva de continuidade, afirmando que uma função continua é aquela que não apresenta saltos nem "buracos". Entretanto, quando é necessário provar teoremas envolvendo esse conceito, a definição formal é necessária e não é possível fugir ao formalismo.

No período compreendido entre os séculos XVII e XIX, matemáticos defrontaram-se com a dificuldade de definir certos objetos matemáticos necessários para uma apresentação formal do cálculo diferencial e integral tais como limite, continuidade, infinito, entre outros. Apenas no século XIX, conceitos basilares do cálculo diferencial e integral alcançaram uma formalização, que permanece até nossos dias.

O objetivo do presente estudo é apresentar a tradução de parte das notas de aula de Karl Weierstrass (1829–1897), editadas com o título *Einleitung in die Theorie der Analytische Funktionen – Vorlesung* 1878 [Introdução à teoria das funções analíticas – Aulas 1878]**,** com o propósito de mostrar como o ensino das funções analíticas e, em especial, a definição de função contínua foi apresentada por este matemático, na Universidade de Berlin, aos seus alunos.

Neste texto, usamos como referência básica o livro que contém as notas de aulas da disciplina compiladas por Adolf Hurwitz, em 1878, retrabalhadas por Peter Ullrich e publicadas pela Deutsche Mathematiker – Vereneigung [Sociedade Alemã de Matemática], em 1988.

A importância, para a História da Educação Matemática, da recompilação de tais notas reside em mostrar o que Weierstrass ensinava e como ele ensinava em suas aulas. Manuscritos de vários alunos que compilaram as aulas de *Introdução à teoria das funções analíticas* foram preservados. São eles: Moritz Pasch – no semestre de inverno de 1865/1866; Wilhelm Killing – no semestre de verão de 1868; Georg Hettner – no semestre de verão de 1874; Adolf Hurwitz – no semestre de verão de 1878; Adolf Kneser e A. Ramsay – no inverno de 1880–81; Ernst Fiedler – no inverno de 1882–1883. Nem todas as notas eram completas. Algumas foram divulgadas em artigos, como o de Dugac (1973).

A escolha de Ullrich pelas anotações de Adolf Hurwitz para publicação em livro deve-se, segundo ele, ao fato de que tais anotações "[...] podem ser consideradas como uma reprodução autêntica da disciplina” (ULLRICH, 1988, p. xiii). O manuscrito em alemão gótico compreende 366 páginas.

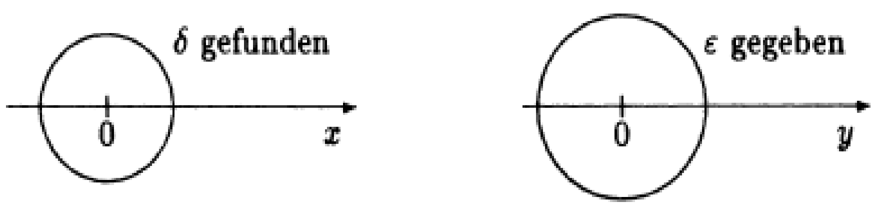
O capítulo 9, escolhido para traduzir, não foi alterado pelo editor, exceto no título. Segundo Ulrich, nesse capítulo, Weierstrass traz a moderna terminologia de topologia elementar, inclui conjunto aberto, o conceito de limite superior e inferior e, ainda, o teorema de Bolzano-Weierstrass, entre outros resultados.

Embora o conceito do ponto limite[1] de um conjunto tenha sido publicado pela primeira vez por Cantor, ele foi inventado por Weierstrass (MOORE, 2008). Naquele que era, até então, conhecido pelo nome de teorema de Bolzano, nosso autor enfatiza que não via este teorema como uma parte da “topologia” ou “analisis situs” ou qualquer outra parte da geometria, mas sim como um teorema da análise clássica. Esse teorema afirma que qualquer espaço euclidiano n-dimensional infinito, limitado tem um ponto limite.

O capítulo 9 apresenta a definição de função contínua na sua segunda versão, já que, no capítulo 5, ele havia trazido e o que chamou de primeira versão, válida para as funções racionais.

> “Os valores complexos que podem tomar os argumentos das funções formam um continuum quando, a cada número complexo, puder ser atribuído um ponto de um certo nível (nível de número complexo) e quando, inversamente, um certo número complexo pertence a cada ponto do nível. - Um tamanho variável limitado é aquele que não deve assumir todos os valores numéricos complexos. Chamamos de magnitude variável, ilimitada ou limitada, aquela que pode aceitar valores infinitamente pequenos, ou que é capaz de tais valores, se, entre os valores que pode aceitar, as quantidades forem menores do que qualquer quantidade arbitrariamente pequena assumida. Um tamanho variável x se torna infinitamente pequeno, com outro y, ao mesmo tempo, significa: ‘Depois de assumir uma grandeza arbitrariamente pequena ε, pode ser determinado para x um limite de δ, de modo que para cada valor de x, para o qual $|x|<\delta$, o valor correspondente torna-se $|y| <\varepsilon$’”. (WEIERSTRASS, 1878, p. 57)

Figura 1: Representação de Weierstrass



Tradução: δ encontrado, ε dado.
Fonte: Weierstrass, 1878, p. 57.

[1] Manteremos no texto a nomenclatura usada pelo autor de ponto limite.

Karl Weierstrass

A ciência em Berlin passou por dois períodos marcantes na pesquisa matemática: o primeiro, no século XVIII, de 1741 a 1766, com Leonhard Euler e de 1766 a 1787, com Joseph Lagrange; e o segundo, no século XIX, com Lejeune Dirichlet de 1828 a 1855, e de 1844 a 1841, com Carl Jacobi; e o ápice alcançado com três matemáticos: Ernst Kummer, Leopold Kronecker e Karl Weierstrass, de 1856 a 1891. É nesse último período que Berlin se equipara a Paris e Göttingen, como centros de pesquisas matemáticas de destaque no mundo (REMMERT, 1988).

Poucos matemáticos iniciaram suas carreiras tal qual Weierstrass – suas primeiras experiências profissionais foram como professor de um ginásio em Münster e só tardiamente, aos 39 anos, manifestou talento para a matemática, quando publicou um artigo que chamou a atenção da comunidade científica, em 1854. No mesmo ano, recebeu o título de doutor honorário pela Universidade de Königsberg e, em 1856, já era professor da Universidade de Berlin.

Os quinze anos em que atuou como professor de ginásio, ensinando não apenas matemática, mas também alemão, caligrafia e geografia, possivelmente foram responsáveis por desenvolver no mestre alemão uma habilidade didática que se tornou visível em seus escritos, principalmente em suas notas de aula: clareza, objetividade e rigor.

Karl Weierstrass nasceu em Ostenfelde e frequentou o ginásio em Paderborn, de 1829 a 1834. Embora tenha, por desejo de seu pai, estudado Direito, em Bonn, ele interrompeu esse curso e começou a estudar Matemática. Em maio de 1839, matriculou-se na Academia de Münster e começou a assistir às aulas de Cristoff Gudermann (1798-1852), que o apoiou fortemente nos estudos de matemática. Prestou exames para professor ginasial e começou a sua carreira, em 1842, atuando como professor de matemática ginasial. Leu as obras de *Mecânica Celeste*, de Laplace, os *Fundamentos da nova teoria das funções elípticas*, de Jacobi e, entre outros, Abel e Lagrange. Em 1854, publicou no Journal de Crelle o artigo “Zur Theorie der Abelschen Functionen” [Sobre a teoria das funções abelianas]. Com esse trabalho, conseguiu o título de doutor pela Universidade de Königsberg.

Em 1856, uma nova publicação do trabalho, mais completa, foi publicada no Jornal de Crelle. Em junho de 1856, ele aceitou o convite para lecionar na Universidade de Berlin. O sucesso das aulas ministradas por Weierstrass tiveram grande repercussão, tanto que vieram estudantes de vários países assistir a suas aulas. Alguns nomes de matemáticos conhecidos, que foram registrados nos arquivos, podem ser referidos: Paul Bachmann (1837–1920), Oscar Boza (1857–1942), Moritz Cantor (1829–1920), Ferdinand Frobenius (1849–1917), Leopold Gegenbauer (1849–1903), Kurt Hensel (1861–1941), Ludwig Hölder (1859–1937), Adolf Hurwitz (1859–1919), Wilhelm Killing (1847–1923), Felix Klein (1849–1925), Adolf Kneser (1862–1930), Leo Königsberger (1837–1921), Mathias Lerch (1860–1922), Sophus Lie (1842–1899), Jakob Lüroth (1844–1910), Franz Mertens, (1840–1927), Hermann Minkowski (1864–1909), Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846–1927), Eugen Netto (1846–1919), Friedrich Schottky (1851–1935), Hermann Schwarz

(1843–1921) e Otto Stolz (1842–1905)[2]. Sofia Kovalevskaia (1850–1891), uma aluna talentosa de Weierstrass, não teve permissão para assistir às aulas na Universidade de Berlin, como os demais citados. Entretanto, isso não a impediu de ter acesso aos conhecimentos objetos de todas as disciplinas por ele ministradas naquela instituição, uma vez que ela teve, com Weierstrass, aulas particulares que contemplavam a matéria tratada nessas disciplinas.

A respeito do ensino e da pesquisa matemática em nível superior, Weierstrass deixa transparecer sua concepção em carta endereçada à reitoria da Universidade de Berlin e datada de 15 de outubro de 1873 (a qual foi incluída no livro sobre a correspondência entre Weierstrass e Kovalevskaia):

> "*O sucesso do ensino acadêmico é baseado* [...] *em grande parte no professor, que guia constantemente o aluno para sua própria pesquisa. Isso não acontece, no entanto, por instruções pedagógicas, mas primeiro e acima de tudo pelo fato de que o professor, ao apresentar uma disciplina, ele mesmo organiza os conteúdos e enfatiza a orientação dos pensamentos de forma adequada, permitindo que o aluno reconheça de forma madura o já pesquisado, levando o aluno* [...] *a avançar para novos resultados ou que justifiquem resultados já existentes. Então, ele não deixa de indicar-lhe os limites da ciência que não foram ultrapassados e de indicar os pontos a partir dos quais um novo avanço parece, no início, possível. Também não deixa de lhe proporcionar uma visão abrangente do curso da sua própria investigação, não ocultando erros, nem iludindo com expectativas que ele próprio não conseguiu materializar.*" (BÖLLING, 1993, p. 16)

Desde 1865, Weierstrass começou a introduzir, nas disciplinas que ministrou na Universidade de Berlin, conceitos topológicos como os de conjunto aberto e de ponto limite de um conjunto. Entretanto, ele não publicou esses resultados (MOORE, 2008).

Carl Boyer, em seu clássico livro *História da Matemática* (1974), no capítulo 25, aborda a "aritmetização da análise". Para o autor, aritmetizar a análise significa reduzir a análise ao conceito de número. Revisitando o livro de Euler intitulado *Introduction à l'anlyse inifintésimale*, constataremos que a definição do conceito de função foi seu ponto de partida e que pouca atenção foi por ele dedicada ao conceito de número real, assim como foi feito por Auguste Louis Cauchy (1789–1857). Entretanto, Bolzano já tinha, em 1817, percebido a necessidade de tornar a análise matemática mais rigorosa (BOYER, 1974), enquanto a Análise de Cauchy continha ainda muitos resquícios da intuição geométrica. A inovação protogonizada por Weierstrass, nas aulas que ministrou na Universidade de Berlin de 1865 a 1891, foi trazer uma nova abordagem da Análise, a qual podemos, como Boyer sugeriu, chamar de aritmetização da Análise.

[2] Disponível em <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Weierstrass/>, acesso em 19 de maio de 2021.

A apresentação do livro de 1878 – Introdução à teoria das funções analíticas – curso Berlin 1878

As notas de aula compiladas por Hurwitz estão divididas em duas partes: 1ª) O conceito de número; 2ª) Introdução à teoria das funções. Cada uma dessas partes por sua vez está subdivida e aparece nos Quadros 1 e 2. Essa organização em capítulos foi realizada pelo editor. A ele – editor – deve ser creditada a atribuição do nome de Bolzano-Weierstrass a um dos teoremas que aparecem nas notas e também a denominação dos subtítulos.

Quadro 1: O conceito de número.

1. Cálculo com a unidade	1.1 Cálculo com múltiplos da unidade 1.2 Cálculo com números racionais positivos múltiplos da unidade 1.3 Números formados a partir de infinitos elementos 1.4 Números finitos e infinitamente grandes 1.5 Somas de números infinitos
2. Cálculo com uma unidade principal e unidades opostas	2.1 Definição de números reais 2.2 Séries infinitas de números reais 2.3 Cálculo com números reais 2.4 Visualização geométrica dos números considerados até agora
3. Cálculo com números compostos	3.1 Introdução de números complexos de forma geométrica 3.2 Introdução à álgebra real 3.3 Séries infinitas de números complexos infinitos 3.4 Produtos de números infinitos

Fonte: Elaborado pela autora.

O quadro 1 indica que, na primeira parte, havia uma ênfase nos números reais e complexos, uma vez que ele pretendia "aritmetizar a análise". Segundo Schubring (2014, p. 232), em carta a Du Bois Reymond, Weierstrass afirmava que construir [...] "a análise a partir da álgebra, portanto, pelo conceito de número e das operações com ele, seria o único meio que permitiria fundamentar a análise por meio do rigor científico". Também, nesta primeira parte, são abordados outros conceitos importantes como séries infinitas e convergência de séries.

Quadro 2: Introdução à teoria das funções.

4. Desenvolvimento histórico do conceito de função	
5 Funções racionais	5.1 Teorema da identidade e fórmulas de interpolação 5.2 Teoria dos anéis de polinômios algébricos 5.3 Funções racionais contínuas
6. Convergência de séries de funções	
7. Séries de potências	7.1 Critérios de convergência de séries de potências

	7.2 Teorema de Weierstrass da série dupla e aplicações 7.3 Teoremas de identidade e Problema de Interpolação 7.4 Suplemento
8. Cálculo Diferencial	8.1 Diferencial primeira e superiores de uma e muitas variáveis 8.2 Regras de calcular do Cálculo Diferencial 8.3 Diferenciação de séries de potências 8.4 Exemplo de uma função contínua não diferenciável
9. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ como espaços topológicos métricos	9.1 Conjuntos abertos e componentes conexos 9.2 Princípio do supremo e teorema de Bolzano–Weierstrass para $\mathbb{R}$ 9.3 Aplicações 9.4 Continuidade uniforme 9.5 Princípio do supremo e teorema de Bolzano–Weierstrass para $\mathbb{R}^n$; máximo e mínimo
10. Funções analíticas e Variáveis	10.1 Continuação analítica 10.2 Funções analíticas
11. Pontos Singulares	11.1 Desigualdade de Cauchy para coeficientes de Taylor 11.2 Existência de pontos singulares no limite do círculo de convergência 11.3 Quociente de duas séries de potências; teorema de Liouville 11.4 Teorema fundamental da Álgebra
12. Somas infinitas e Produto de funções analíticas	12.1 Teorema das séries duplas de Weierstrass 12.2 Séries de funções analíticas 12.3 Teorema da diferenciação de Weierstrass 12.4 Representação de funções através de produtos infinitos
13 Continuação de funções analíticas obscuras	13.1 Sistema de funções analíticas 13.2 Derivadas de funções analíticas 13.3 Continuação do sistema de funções
14 Funções analíticas de várias variáveis	14.1 Continuação analítica em várias variáveis 14.2 Série de potências de várias variáveis
15 Singularidades isoladas	15.1 Tipos de singularidades isoladas 15.2 Representação de funções meromorfas
16 Função exponencial	16.1 Funções inteiras sem ponto zero 16.2 Propriedades da função exponencial, Imagem e “Urbild”
17 Função logarítmica	17.1 Funções logarítmicas de existência local 17.2 Continuação de funções analíticas juntamente com segmentos e em triângulos 17.3 Características principais dos logaritmos
18 Ramos das funções analíticas	
19 Teorema do	19. 1 Prova do teorema do produto de Weierstrass

produto de Weierstrass	19. 2 Exemplo 19. 3 Reverso do critério de convergência para o produto 19. 4 Representação de funções meromorfas
20 Sobre a inversibilidade das funções analíticas	20.1 Teorema sobre funções implícitas para séries de potências com várias variáveis 20.2 Inversas de funções analíticas
21 Sobre o domínio analítico	21.1 Estruturas analíticas de primeiro grau de duas variáveis 21.2 Interpretação de funções analíticas por meio de estruturas analíticas 21.3 Estruturas analíticas de várias variáveis e de graus superiores

Fonte: Elaborado pela autora.

Um aspecto que chama a atenção no Quadro 2 é o capítulo referente ao desenvolvimento histórico do conceito de função, pouco usual em livros de análise à época. Nele o autor critica definições como a de Bernoulli: “Se duas quantidades variáveis estão ligadas entre si de tal forma que cada valor de uma corresponde a um certo número de valores da outra, então cada uma das quantidades é chamada de função das outras. Pois é impossível derivar dela quaisquer propriedades gerais da função [...]” (WEIERSTRASS, 1878, p. 48). Neste capítulo, o autor apresenta uma função contínua que não é diferenciável em nenhum ponto:

$x= b\cos(at)+b^2\cos(a^2t)+ b^3\cos(a^3t)+ \ldots$

$y= b\sin(at)+b^2\sin(a^2t)+ \ldots$

para $b<1$.

No título desta disciplina aparece a nomenclatura de “funções analíticas”. Mas o que Weierstrass entendia por essa expressão? Ele define como:

> “*Se uma série* $f(x\ |a|)$ *for capaz de um prolongamento, ela é chamada de elemento de funções. Se um ponto x' está dentro do domínio de convergência de um elemento de funções, que é um prolongamento do elemento de função originalmente dado* $f(x\ |a|)$ *, então ele tem um certo valor para x', e a este valor particular nós chamamos de um valor da função analítica determinada pelo elemento de função de saída*”. (WEIERSTRASS, 1988, p. 95)

Ele mostrou que a representação de uma função $f(x)$ por uma série de potências em torno de um ponto fixo P_1 no plano complexo converge em todos os pontos que são internos a um círculo C_1, que tem centro em P_1 e que também passa por uma singularidade mais próxima. Se a mesma função for expandida em $P_2 \neq P_1$, a série convergirá num círculo C_2, que tem P_2 como centro e que passa pela singularidade mais próxima de P_2 (BOYER, 1974).

A seguir apresentamos a tradução do capítulo 9 e a sua versão em alemão, conforme consta do livro *Einleitung in die Theorie der Analytische Funktionen – Vorlesung* 1878 (WEIERSTRASS, 1988, pp. 83–92).

Referências

BÖLLING, Reinhard. 1993. *Briefwechsel zwischen Karl Weierstrass und Sofja Kowalewslaja* [Troca de cartas entre Karl Weierstrass e Sofia Kovalevskaia]. Berlin: Akademie Verlag.

BOYER, Carl. 1974. *História da Matemática*. Tradução Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher.

CAUCHY, Augustin-Louis. 1821. *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechinique*. Paris: L'Imprimerie Royale.

DUGAC, Pierre. 1973. Eléments d'analyse de Karl Weierstrass. *Archive for History of Exact Sciences*, 10, 41-176.

MORE, Gregory. 2008. The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology. *Historia Mathematica*, 35, 220–241.

REMMER, R. 1988. Geleitwort. In: *Karl Weierstrass, Einleitung in die theorie der analytischen funktionen*. Vorlesung Berlin 1878. V. 4. Deutsche Mathematiker Vereinigung. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, p. ix-x.

SCHUBRING, Gert. 2014. A correspondência de Karl Weierstrass: resultados de pesquisa em andamento. *Anais/Actas do 6º Encontro Luso-brasileiro de História a Matemática*, 225–240.

ULLRICH, Peter. 1988. Vorwort des Bearbeiters. In: *Karl Weierstrass, Einleitung in die theorie der analytischen funktionen*. Vorlesung Berlin 1878. V. 4. Deutsche Mathematiker Vereinigung. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, pp. xi-xxvii.

WEIERSTRASS, Karl. 1988. *Einleitung in die theorie der analytischen funktionen*. Vorlesung Berlin 1878. V. 4. Deutsche Mathematiker Vereinigung. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Circe Mary Silva da Silva
Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) Pelotas, RS – Brasil.

E-mail: circe.dynnikov@ufpel.edu.br

Capítulo 9

$\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ como espaços topológicos métricos

Uma grandeza real variável ilimitada é aquela que pode assumir todos os valores intermediários entre $-\infty$ e $+\infty$; todos os pontos de uma linha reta representam o domínio[3] de tal variável. Pensemos, agora, em uma união de grandezas variáveis ilimitadas. (No caso presente trata-se apenas de grandezas reais; mas tudo pode ser facilmente transposto para variáveis complexas). Cada sistema particular de variáveis é denominado de um lugar[4] no domínio das grandezas. Sejam x_1, $x_2 \ldots x_n$ as variáveis, a_1, $a_2 \ldots a_n$ um lugar no seu domínio – que deve ser entendido como $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2 \ldots x_n = a_n$ no sistema de valores isso é assim se $|x_1' - a_1| < \delta$, $|x_2' - a_2| < \delta \ldots |x_n' - a_n| < \delta$, $x_1', x_2' \ldots x_n'$ é um lugar localizado na vizinhança δ do lugar $a_1, a_2 \ldots a_n$. x_ν' entre $a_\nu + \delta$ e $a_\nu - \delta$.

No domínio de uma variável x ilimitada, seja definido de qualquer forma um número infinito de lugares; a totalidade desses lugares é designada como x'. Então os x' podem ser representados por pontos discretos ou continuamente consecutivos de uma linha reta neste último caso, se diz que eles formam um contínuo. Isto deve ser definido analiticamente assim: a é um lugar do domínio definido por x', e se em uma vizinhança suficientemente pequena escolhida de a todos os lugares dessa vizinhança estão no domínio x', então os x' formam um contínuo.

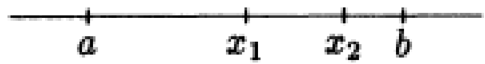
Suponha-se que numa vizinhança de um lugar a de um domínio x' existe outro lugar a_1, de modo que todos os lugares do intervalo a até a_1 pertencem ao domínio de x'; a_2 tem a mesma propriedade em relação a a_1 que a_1 em relação a a; do mesmo modo, se comporta a_3 em relação a a_2, a_4 em relação a $a_3 \ldots a_n$ em relação a a_{n-1}.

Então, dizemos que é possível uma passagem contínua de a_1 para a_n. Se entre a e b não há passagem contínua possível no domínio de x', todo um "continuum" de valores de x' pertence tanto a a, como a b. Portanto, um domínio consiste em que passagens contínuas de lugar para outro são possíveis, consistindo de um ou mais pedaços contínuos e separados. O que se entende por limites de um pedaço contínuo é imediatamente claro.

Tudo isso pode ser transportado sem dificuldade para um domínio de n variáveis de n -variedades. Para $n = 3$ ele ainda pode ser ilustrado geometricamente, o que significa que verifica-se de um lugar para outro uma passagem contínua.

A possibilidade de uma passagem contínua de um lugar para outro também acontece do último para o primeiro.

[3] Optamos por traduzir *Gebiet*, no original, pela palavra "domínio".
[4] A palavra usada por Weierstrass em alemão foi *Stelle*, que pode ser traduzido por "lugar", "ponto". Optamos por "lugar".



Isso não é evidente, porque, por exemplo, haverá uma vizinhança de x_1 que conterá x_2, mas não o contrário, uma vizinhança de x_2, a qual contenha ao x_1, pois uma vizinhança de x_2 não deve ser maior que $\overline{x_2 b}$. Entre x_1 e x_2, no entanto, só se precisa ligar os lugares entre x_1 e x_2 que formam intervalos menores ou iguais a $\overline{x_2 b}$, a fim de mostrar que uma passagem contínua também é possível a partir de b para a, se foi possível a partir de a para b.

9.2 Princípio do Supremo e Teorema de BOLZANO-WEIERSTRASS para $\mathbb{R}$

g é denominado de limite superior de uma grandeza variável se não houver nenhum valor da variável maior do que g e se, no intervalo $g - \delta \ldots g$, sendo δ um tamanho ainda pequeno, ainda encontram-se lugares do domínio das variáveis. g' é o limite inferior, se não houver valor das variáveis menor do que g' e se em cada intervalo, por menor que seja, $g' \ldots g' + \delta$ há lugares do domínio. Se g e g' em si pertencem ao domínio ou não, isto dá no mesmo. (g pode ser igual a ∞ e g' pode ser igual a $-\infty$.)

"Cada domínio de uma grandeza variável tem um limite superior e um inferior". Nós assumimos que a variável só admite valores positivos e não pode ser igual a ∞ . O caso geral pode então ser facilmente reduzido a este caso específico. A prova do nosso teorema é precedida pelo seguinte: $a_0,\ a_1,\ a_2 \ldots$ seria então uma série de números, que não diminuem e são todos menores uma dada grandeza g (finita). Vamos, então, formar os números $b_1 = a_1 - a_0$, $b_2 = a_2 - a_1 \ldots\ b_v = a_v - a_{v-1} \ldots$, assim $b = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ inf. uma grandeza finita. A soma de qualquer número de termos das séries $b_1,\ b_2,\ b_3 \ldots$,das quais b_n tem o índice mais alto, é menor ou igual a $a_n - a_0$, então certamente menor que g , sendo, portanto, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ finito.

Um lugar que pertence ao nosso domínio é novamente designado por x'. Seja a um inteiro positivo. Agora consideramos a série de números $\frac{1}{a}$, $\frac{2}{a}$, $\frac{3}{a}$, $\frac{4}{a} \ldots$. A partir de x' assumimos que x' é consistentemente maior que 0 e menor que *G*, onde *G* significa um número positivo. Assim, na série de números acima chegamos a um primeiro termo, que é maior ou igual a *G*, e também maior do que aquele que qualquer valor que x' pode assumir. No intervalo $\frac{a_1}{a} \ldots \frac{a_1 + 1}{a}$ deve então necessariamente haver um número de lugares que pertencem a esse domínio, se entendemos por $\frac{a_1 + 1}{a}$ o primeiro termo da série de números, que excede todos os valores permitidos para x' em grandeza. Dessa forma, a cada número a pertence um número a_1. Os termos da série $a, a^2, a^3, a^4, \dots a^n \dots$ pertencem, assim, aos números $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots a_n \dots$ para cada um dos intervalos

$$\begin{array}{c}
\dfrac{a_1}{a} \dots \dfrac{a_1+1}{a} \\
\dfrac{a_2}{a^2} \dots \dfrac{a_2+1}{a^2} \\
\dfrac{a_3}{a^3} \dots \dfrac{a_3+1}{a^3} \\
\vdots \\
\dfrac{a_n}{a^n} \dots \dfrac{a_n+1}{a^n}
\end{array}$$

haja pelo menos um lugar x' do domínio.

Vamos agora mostrar que na série $\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a^2}, \frac{a_3}{a^3}, \dots, \frac{a_n}{a^n} \dots$ cada termo é maior do que o anterior. Para isso, dividimos o intervalo $\frac{a_n}{a^n} \dots \frac{a_n+1}{a^n}$ na série de intervalos:

$$\text{I.} \quad \left\{ \begin{array}{r}
\dfrac{a_n}{a^n} \dots \dfrac{a_n}{a^n} + \dfrac{1}{a^{n+1}} \\
\dfrac{a_n}{a^n} + \dfrac{1}{a^{n+1}} \dots \dfrac{a_n}{a^n} + \dfrac{2}{a^{n+1}} \\
\vdots \\
\dfrac{a_n}{a^n} + \dfrac{a-1}{a^{n+1}} \dots \dfrac{a_n}{a^n} + \dfrac{a}{a^{n+1}}.
\end{array} \right.$$

Pelo menos em um desses intervalos deve haver lugares do tipo definido (lugares x') os quais estão no intervalo $\frac{a_n}{a^n} \dots \frac{a_n+1}{a^n}$. Seja o intervalo $\frac{a_n}{a^n} + \frac{m-1}{a^{n+1}} \dots \frac{a_n}{a^n} + \frac{m}{a^{n+1}}$ que deve ser o último dos intervalos que contêm os intervalos I. e que contêm x'.

Mas este intervalo $\frac{a \cdot a_n + (m-1)}{a^{n+1}} \dots \frac{a \cdot a_n + m}{a^{n+1}}$ é idêntico ao intervalo $\frac{a_{n+1}}{a^{n+1}} \dots \frac{a_{n+1}+1}{a^{n+1}}$, então $a_{n+1} = a \cdot a_n + m - 1$, assim $\frac{a_{n+1}}{a^{n+1}} \geq \frac{a_n}{a^n}$ como foi afirmado.

Formemos agora as diferenças $b_0 = \frac{a_1}{a}$, $b_1 = \frac{a_2}{a^2} - \frac{a_1}{a}$, $b_2 = \frac{a_3}{a^3} - \frac{a_2}{a^2}$, $b_3 = \frac{a_4}{a^4} - \frac{a_3}{a^3} \dots$ e, assim, as somas

$$b_0 = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots = \frac{a_1}{a} + \frac{m_1 - 1}{a^2} + \frac{m_2 - 1}{a^3} + \dots ,$$

de modo que b é o limite superior do domínio x'.

b é antes de tudo uma grandeza finita (cf. p. 84). A soma dos n primeiros membros de b é $\frac{a_n}{a^n}$, então $b > \frac{a_n}{a^n}$ (todos os termos de b são números positivos); mas $b \leq \frac{a_n + 1}{a^n}$. Não pode haver nenhum valor de x' maior do que b ; pois em função da definição para n suficientemente grande, b pode ser aproximado a $\frac{a_n + 1}{a^n}$ o quanto queiramos, e não há nenhum valor de x' maior que $\frac{a_n + 1}{a^n}$. Quanto mais distante b estiver entre $\frac{a_n}{a^n}$ e $\frac{a_n + 1}{a^n}$ e se, no entanto, houver pelo menos um valor de x' entre estes limites, como acaba de ser mostrado, não há nenhum valor de x' maior que b , seguindo-se que há sempre pelo menos um valor de x' entre b e $b - \delta$ (δ de qualquer tamanho, ainda que pequeno).

"Em cada domínio discreto de uma multiplicidade, que contém infinitamente muitos lugares, há pelo menos um lugar que se distingue pelo fato de que em cada pequena vizinhança do mesmo domínio há infinitamente muitos lugares do domínio".

(Se um domínio é representado por pontos de uma curva, como uma linha reta, então uma certa compressão da área ocorre neste lugar.) Por exemplo: seja $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ inf. uma série convergente, assim que, s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 … , onde $s_n \sum_{i=0}^{n} a_i$ é entendida como um domínio discreto de infinitamente muitos lugares. O lugar na vizinhança, embora pequeno, pode conter infinitamente muitos outros lugares do domínio, sendo aqui s a soma da série. Porque é $s - s_n < \delta$ ou $s - \delta < s_n$, se δ é qualquer grandeza pequena, e, à escolha de δ, n é maior do que um número determinado. Então há entre s e $s - \delta$, δ tão pequeno, para muitas grandezas infinitas s_n.

Nós primeiro assumimos (como prova do nosso teorema) que os lugares definidos estão contidos dentro de dois limites g_0 e g_1.

Seja a um inteiro. Nós formamos a série

I. $$- \frac{m}{a}, - \frac{m-1}{a}, - \frac{m-2}{a}, \dots , - \frac{1}{a}, 0, + \frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \dots , \frac{n-2}{a}, \frac{n-1}{a}, \frac{n}{a}.$$

o mesmo é continuado para a esquerda até agora que $-\frac{m}{a} < g_0$, e para a direita até que $\frac{n}{a} > g_1$. Se estamos, agora, a considerar todos os intervalos em série I. $\frac{\mu}{a} \ldots \frac{\mu+1}{a}$ tendo apenas um número finito de membros, é claro que deve haver pelo menos um entre eles; dentro do qual há infinitamente muitos lugares no domínio definido; porque há infinitamente muitos lugares definidos, e só um número finito de intervalos. O primeiro intervalo, que contém infinitamente muitos lugares do domínio, é $\frac{\mu_1}{a} \ldots \frac{\mu_1+1}{a}$. Abaixo de $\frac{\mu_1}{a}$ há apenas lugares isolados do domínio. A cada número a pertence agora um número μ_1; nós formamos o último para os números da série $a, a^2, a^3, \ldots$ e denotamos os um μ's pertencente através de $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$. Então temos a série de intervalos:

$$\left.\begin{array}{c}
\frac{\mu_1}{a} \ldots \frac{\mu_1+1}{a} \\
\frac{\mu_2}{a^2} \ldots \frac{\mu_2+1}{a^2} \\
. \\
. \\
. \\
\frac{\mu_n}{a^n} \ldots \frac{\mu_n+1}{a^n} \\
\frac{\mu_{n+1}}{a^{n+1}} \ldots \frac{\mu_{n+1}+1}{a^{n+1}} \\
. \\
. \\
.
\end{array}\right\}$$

sabemos que cada um contém infinitamente muitos lugares do domínio e que, abaixo do limite inferior de cada intervalo, há apenas um número finito de lugares do domínio. A partir daí podemos concluir: $\frac{\mu_{n+1}+1}{a^{n+1}} > \frac{\mu_n}{a^n}$ e $\frac{\mu_{n+1}}{a^{n+1}} < \frac{\mu_n+1}{a^n}$, então:

$$1)\ \mu_{n+1} + 1 > a \cdot \mu_n \qquad \text{e} \qquad 2)\ \mu_{n+1} < a \cdot \mu_n + a$$

A partir de 1) podemos concluir (uma vez que se trata de uma unidade): $\mu_{n+1} \geq a \cdot \mu_n$ e $\frac{\mu_{n+1}}{a^{n+1}} \geq \frac{\mu_n}{a^n}$. Os números $\frac{\mu_1}{a}, \frac{\mu_2}{a^2}, \frac{\mu_3}{a^3}, \frac{\mu_4}{a^4} \ldots$, assim, formam uma série de grandezas crescentes, sem que nenhuma delas, no entanto, atravesse a fronteira, além da qual não há lugares do domínio. Portanto,

$$\text{I. } A = \frac{\mu_1}{a} + \frac{\mu_2 - a\ \mu_1}{a^2} + \frac{\mu_3 - a\ \mu_2}{a^3} + \dots$$

é uma grandeza finita (ver p. 84), e eu afirmo que A é um tal lugar em cuja vizinhança há infinitamente muitos lugares do domínio. Pode-se em qualquer vizinhança $A - \delta \dots A + \delta$ de A por intervalos de r forçados suficientemente grandes $\frac{\mu_r}{a^r} \dots \frac{\mu_r + 1}{a^r}$ encontrar o todo dentro do intervalo $A - \delta \dots A + \delta$, assim que, desde que entre $\frac{\mu_r}{a^r} \dots \frac{\mu_r + 1}{a^r}$ se encontrem infinitamente muitos lugares do domínio, isto também vale para o intervalo da $A - \delta \dots A + \delta$. – O tamanho A é perfeitamente determinado. Por exemplo, se definirmos $a = 10$, obtemos uma equação I nesta página na forma de uma fração decimal.

9. 3 Aplicações

Seja $c_0, c_1, c_2 \dots$ ao inf. uma série de grandezas numéricas. Coloque $s_0 = c_0$, $s_1 = c_0 + c_1$, $s_2 = c_0 + c_1 + c_2 \dots$, então se faça as grandezas $s_0, s_1, s_2 \dots$ um domínio de infinitamente muitos lugares discretos. Se também assumirmos que s_n não pode exceder uma grandeza indicada, então, de acordo com o nosso teorema, deve existir pelo menos um lugar s em cuja vizinhança, sendo este último tão pequeno quanto se quiser, com ainda infinitamente muitos lugares s_n. Vamos agora mostrar que só pode haver esse lugar s, se ainda se pressupõe que $s_n - s_{n+r}$ se torna infinitamente pequeno, e se n se torna infinitamente grande ($s_n - s_{n+r}$ se torna infinitamente pequeno ao mesmo tempo com $\frac{1}{n}$) para cada valor de r.

Pois pode haver s e s' como tais lugares e $s < s'$. Como em todos os pequenos intervalos, $s - \delta \dots s + \delta$ há infinitamente muitos lugares s_n, assim também devem ser aqueles em que n excede qualquer número. Seja ε um tamanho pequeno arbitrariamente definido; então n pode ser assumido como sendo tão grande que $s_n - s_{n+r} < \varepsilon$ para cada r. s_n agora está dentro do intervalo $s - \delta \dots s + \delta$, de modo que $s - s_{n+r} = s - s_n + \varepsilon'$, $\varepsilon' < \varepsilon$, e consequentemente também ε' pode ser arbitrariamente pequeno, sendo também s_{n+r} para cada r dentro do intervalo. Nenhum lugar s_m ,para o qual $m > n$, onde n é um número indicado, pode assim cair para além de $s + \delta$, portanto não pode haver lugar s' para além de s, que ocupa a mesma destacada posição que s.

Seja $y = f\ (x)$ uma função contínua de x. "Se x_1 é um valor positivo de y e x_2 um negativo; então entre x_1 e x_2 há um valor de x para o qual $y = 0$".

Pode-se especificar entre x_1 e x_2 dois valores $x_1{}'$ e $x_2{}'$ de forma que o intervalo $x_1 \dots x_1{}'$ y é sempre positivo, e entre $x_2{}'$ e x_2 sempre negativo.

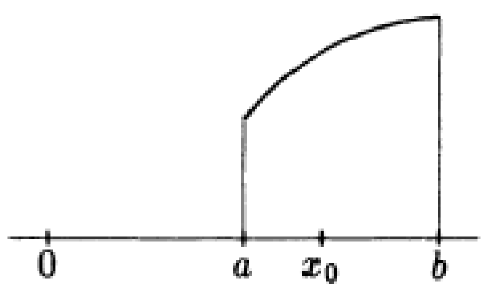
Seja a um inteiro tal que $\frac{1}{a}$ é menor que $x_1' - x_1$ e menor que $x_2 - x_2'$ ($\frac{1}{a^n}$ seja menor que $x_1' - x_1$ é menor que $x_2 - x_2'$), e consideramos os intervalos de $\frac{m}{a} \dots \frac{m+1}{a}$, …, $\frac{n-1}{a} \dots \frac{n}{a}$, onde $\frac{m+1}{a} > x_1 \geq \frac{m}{a}$, $\frac{n}{a} \geq x_2 > \frac{n-1}{a}$, então haverá um número no qual y é positivo, e entre estes deve haver um último dado, $\frac{\mu-1}{a} \dots \frac{\mu}{a}$ para o qual esteja nos intervalos $\frac{\mu}{a} \dots \frac{\mu+1}{a}$, em que o mesmo y é consistentemente positivo.

Então todo número a tem um número μ, e todos os números $\frac{\mu}{a}$ estão entre x_1 e x_2. Vamos agora observar todos os lugares $\frac{\mu}{a}, \frac{\mu_2}{a^2}, \frac{\mu_3}{a^3}$, …, todos os lugares $\frac{\mu}{a}$ para a série a, a^2, a^3 …, então deve haver um lugar x_0 entre x_1 e x_2, de modo que em qualquer pequena vizinhança $x_0 - \delta \dots x_0 \dots x_0 + \delta$ dos mesmos lugares $\frac{\mu_\lambda}{a^\lambda}$ se apresentem infinitos números. Mas como y é supostamente uma função contínua de x, eu posso escolher ε δ tão pequeno quanto quiser e depois assumir que no intervalo $x_0 - \delta \dots x_0 \dots x_0 + \delta$ $y - y_0 < \varepsilon$ (y_0 é igual a $f(x_0)$). No intervalo $x_0 - \delta \dots x_0 + \delta$ estão completamente incluídos os intervalos $\frac{\mu_n}{a^n} \dots \frac{\mu_n + 1}{a^n}$. Se y_0 for positivo, ε, em seguida, poderia ser escolhido tão pequeno que y deveria ser efetivamente positivo entre $x_0 - \delta$ e $x_0 + \delta$; se y_0 for negativo, ε, em seguida, poderia ser escolhido tão pequeno que y deveria ser efetivamente negativo entre $x_o - \delta$ e $x_0 + \delta$. As duas coisas não são permitidas; portanto, y_0 deve ser igual a 0, q.e.d..

O teorema sobre o limite superior é um caso especial do teorema sobre o ponto de compressão. Todos os lugares de qualquer domínio podem estar entre 0 e *G*. Entre a série de contagem 0, $\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \frac{3}{a} \dots \frac{m}{a} \dots$ há um primeiro número que é maior do que qualquer um dos lugares desejados do domínio. Este primeiro é $\mu + \frac{1}{a}$, então entre $\frac{\mu}{a}$ e $\frac{\mu+1}{a}$ há pelo menos um lugar do domínio. A cada número a pertence tal número μ; então nós obtemos infinitamente muitos números $\frac{\mu}{a}$. De acordo com o nosso teorema, agora deve haver um lugar *g* em cuja vizinhança, por menor que seja, lugares $\frac{\mu}{a}$ podem ser encontrados. O lugar g é o limite superior; porque em cada intervalo $g - \delta \ldots g$, δ é tão pequeno quanto se queira, encontra-se pelo menos um lugar do domínio definido; a pode exceder qualquer grandeza, porque há infinitamente muitos lugares $\frac{\mu}{a}$ na vizinhança do g. Agora, pode-se selecionar um a tão grande que $\frac{1}{a} < \delta$, de modo que o intervalo $\frac{\mu}{a} \ldots \frac{\mu+1}{a}$ esteja localizado na vizinhança δ de g. Além disso, nenhum lugar do domínio pode ser maior do que g, uma vez que no caso oposto existiriam intervalos $\frac{\mu}{a} \ldots \frac{\mu+1}{a}$, além dos quais ainda deveriam existir lugares do domínio.

9.4 Continuidade uniforme

Pode-se dar a seguinte definição para a continuidade de uma função: "$f(x)$ (onde x deve apenas assumir valores reais) é contínua entre os limites $x = a$ e $x = b$, se, depois de assumir uma grandeza arbitrariamente pequena ε , puder ser encontrado um número δ do seu tipo que para todos os valores de x_1 e x_2 , aplicáveis a $|x_1 - x_2| < \delta$ também se torne a $|f(x) - f(x_2)| < \varepsilon$." Deve ser demonstrado que essa definição corresponde à definição dada anteriormente. Dividimos, a partir do ponto zero, a linha reta em intervalos $\frac{m}{a_1} \ldots \frac{m+1}{a_1}$, em que a_1 é um número positivo inteiro e m passa por todos os valores inteiros de $-\infty$ até $+\infty$.



Entre a e b ocorre apenas um número finito de tais intervalos. Em cada um desses intervalos $f(x)$ há um limite superior e um limite inferior; assim $(f(x_2) - f(x_1))$ tem um limite superior. O intervalo em que esse limite superior tem o maior valor, nós o suprimimos; deixe-o ser $\frac{\mu}{a_1} \ldots \frac{\mu+1}{a_1}$. Se deixarmos a_1 passar por todos os inteiros positivos, nós finalmente teremos muitos desses intervalos; há $\frac{\mu}{a_1} \dots \frac{\mu+1}{a_1}$ (entre a e b). Assim, há um lugar x_0, em cujo entorno há infinitamente muitos lugares $\frac{\mu}{a_1}$. Agora, isso permite que encontremos, uma vez que assumimos que f é contínua entre a e b de acordo com a nossa definição anterior, um ξ de forma que seja $|h| < \xi \quad |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \frac{1}{4}\varepsilon$.

Se então x' e x'' no intervalo $x_0 - \xi \dots x_0 + \xi$, assim é: $|f(x') - f(x_0)| < \frac{1}{4}\varepsilon$, e $|f(x'') - f(x_0)| < \frac{1}{4}\varepsilon$, consequentemente, $|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{4}\varepsilon$.

Agora que existem infinitamente muitos lugares $\frac{\mu}{a_1}$, a_1 pode ser assumido como sendo tão grande que o intervalo $\frac{\mu}{a_1} \dots \frac{\mu+1}{a_1}$ está localizado completamente dentro do intervalo $x_0 - \xi \dots x_0 + \xi$. Para valores de x_1 e x_2 dentro do intervalo $\frac{\mu}{a_1} \dots \frac{\mu+1}{a_1}$, para o qual portanto $|x_1 - x_2| < \frac{1}{a_1}$, é também $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Desde que em todos os intervalos $\frac{m}{a_1} \dots \frac{m+1}{a_1}$, o intervalo $\frac{\mu}{a_1} \dots \frac{\mu+1}{a_1}$ é o maior limite superior da diferença $|f(x_1) - f(x_2)|$, então para cada um dos outros dois valores x_1 e x_2, que satisfazem a condição $|x_1 - x_2| < \frac{1}{a_1}$, se ambos os valores estiverem em um e no mesmo intervalo $\frac{m}{a_1} \dots \frac{m+1}{a_1}$, também $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Sejam x_1 e x_2 dois diferentes (claro, um em relação ao outro) intervalos e $\frac{m}{a_1} \dots \frac{m+1}{a_1}$ e $\frac{m+1}{a_1} \dots \frac{m+2}{a_1}$, assim é certamente $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Então podemos encontrar de fato um número $\delta = \frac{1}{a_1}$, de modo que somente se $|x_1 - x_2| < \delta$ se torna, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ falha, onde ε era uma grandeza arbitrariamente pequena.

A nossa primeira definição de continuidade tem assim a propriedade expressa na segunda definição como consequência.

9.5 Princípio do Supremo e Teorema de BOLZANO-WEIERSTRASS para $\mathbb{R}^n$; máximos e mínimos

Se a é um número inteiro (positivo), nós definimos por $\left(\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a}, \frac{a_3}{a} \ldots \frac{a_\nu}{a} \ldots \frac{a_n}{a}\right)$ um domínio particular, ou seja, a totalidade dos sistemas de valores $x_1, x_2, x_3 \ldots x_\nu \ldots x_n$, onde x_ν está entre $\frac{a_\nu}{a}$ e $\frac{a_\nu + 1}{a}$.

Agora, assumimos que são definidos infinitamente muitos lugares (sistemas de valores) $x_1, x_2 \ldots x_n$, ou seja, nenhum dos lugares deve ser inferior a um lugar que possa ser especificado, e nenhum deve ser superior a outro lugar que possa ser especificado. Haverá então um primeiro domínio sob os intervalos $\left(\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a}, \ldots \frac{a_n}{a}\right)$ [$a_1, a_2 \ldots a_n$ são números inteiros positivos ou negativos] nos quais existem infinitamente muitos dos lugares definidos. Este primeiro intervalo divide-se novamente em subintervalos dividindo em intervalos o intervalo $\frac{a_\lambda}{a} \ldots \frac{a_\lambda + 1}{a}$ assim decomposto:

$$\frac{a_\lambda}{a} \ldots \frac{a_\lambda}{a} + \frac{1}{a^2}; \frac{a_\lambda}{a} + \frac{1}{a^2} \ldots \frac{a_\lambda}{a} + \frac{2}{a^2}; \ldots \frac{a_\lambda}{a} + \frac{a-1}{a^2} \ldots \frac{a_\lambda}{a} + \frac{a}{a^2}$$

Assim chegamos ao subdomínio de um domínio $\left(\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a} \ldots \frac{a_n}{a}\right)$, que estão completamente contidos no último. Seja $\left(\frac{a_1{}'}{a^2}, \frac{a_2{}'}{a^2} \ldots \frac{a_n{}'}{a^2}\right)$ o primeiro desses subdomínios, que contém infinitamente muitos lugares do domínio. A partir do domínio $\left(\frac{a_1{}'}{a^2}, \ldots \frac{a_n{}'}{a^2}\right)$ deriva-se um domínio $\left(\frac{a_1{}''}{a^3}, \ldots \frac{a_n{}''}{a^3}\right)$ que está completamente dentro dele e, (a partir dos subdomínios do domínio $\left(\frac{a_1{}'}{a^2}, \ldots \frac{a_n{}'}{a^2}\right)$, é o primeiro que contém infinitamente muitos lugares. Se continuarmos desta forma, ficam cada vez mais estreitos os domínios dentro dos quais ainda existem infinitamente muitos lugares do domínio, e o lugar tem a característica

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{a_1}{a} + \dfrac{a_1' - aa_1}{a^2}\,\dfrac{a_1'' - aa_1'}{a^3} + \ldots \\ A_2 = \dfrac{a_2}{a} + \dfrac{a_2' - aa_2}{a^2}\,\dfrac{a_2'' - aa_2'}{a^3} + \ldots \\ A_3 = \dfrac{a_3}{a} + \dfrac{a_3' - aa_3}{a^2}\,\dfrac{a_3'' - aa_3'}{a^3} + \ldots \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

de que em cada pequena vizinhança da mesma ainda existem infinitamente muitos lugares do domínio.

Existem definidos infinitamente muitos lugares($x_1,\ x_2\ \ldots\ x_n$). O lugar ($c_1,\ c_2\ \ldots\ c_n$) não pertence ao domínio definido. Façamos

$$\xi_1 = \frac{x_1 - c_1}{(x_1 - c_1)^2 + \ldots + (x_n - c_n)^2}\ ,\ \xi_1 = \frac{x_1 - c_1}{(x_1 - c_1)^2 + \ldots + (x_n - c_n)^2}\ ,\ \ldots$$

$$\xi_n = \frac{x_n - c_n}{(x_1 - c_1)^2 + \ldots + (x_n - c_n)^2}\ ,$$

Assim a cada lugar $x_1,\ x_2\ \ldots\ x_n$ corresponde um lugar ($\xi_1,\ \xi_2\ \ldots\ \xi_n$), e o contrário, para cada lugar $\xi_1,\ \ldots\ \xi_n$, um lugar $x_1,\ \ldots\ x_n$).
Então,

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = \frac{1}{(x_1 - c_1)^2 + \ldots + (x_n - c_n)^2}\ ,$$

também

$$x_1 - c_1 = \frac{\xi_1}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2}\ ,\ \ldots\ x_n - c_n = \frac{\xi_n}{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$$

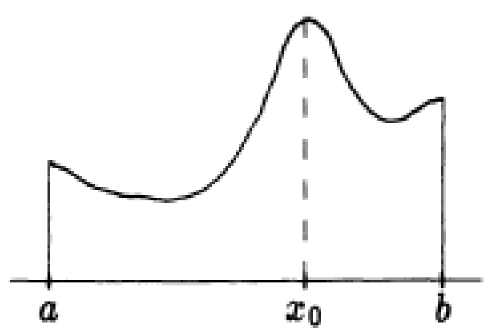
Para os domínios definidos ($x_1,\ \ldots\ x_n$) você obtém um domínio correspondente ($\xi_1,\ \ldots\ \xi_n$), em que não há infinitamente grande lugar, uma vez que ($c_1,\ c_2\ \ldots\ c_n$), de acordo com o pressuposto, não há nenhum lugar do domínio ($x_1,\ \ldots\ x_n$). Um ponto de fronteira do domínio (ξ) corresponde a um tal domínio (x). É o primeiro o lugar $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \ldots = 0$, então o último é o lugar $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = \infty$.

Um lugar ($x_1,\ \ldots\ x_n$) de um domínio corresponde sempre a um lugar y; então y também é uma grandeza variável, e, assim, tem um limite inferior e um limite superior, este último sendo g. Em seguida, existe [no domínio de x] (Não é necessário que o lugar pertença ao domínio definido) pelo menos um lugar da condição a seguir: Se eu considerar qualquer vizinhança da mesma, ainda que pequena, e se eu considerar os correspondentes valores de y para os lugares do domínio x que pertencem a domínio, em seguida, esses valores de y também têm o seu limite, sendo ele apenas g. O mesmo se aplica ao limite inferior.

Provamos este teorema apenas para um domínio de uma variável x .

Nós consideramos todos os intervalos $\frac{\mu}{a} \ldots \frac{\mu+1}{a}$ em que aparecem x para o qual existem y associados. Para o último existe em cada intervalo $\frac{\mu}{a} \ldots \frac{\mu+1}{a}$ um limite superior g_μ . Entre todos os intervalos, no entanto, deve haver pelo menos um para que o limite superior seja $g_\mu = g$, uma vez que todos os y tomados em conjunto devem ter o limite superior g. Se há diversos intervalos para os quais seja $g_\mu = g$, então, consideremos qualquer um deles, por exemplo o primeiro. Existem agora infinitos lugares $\frac{\mu}{a}$ (um para cada número a), fazendo para $\frac{\mu}{a} \ldots \frac{\mu+1}{a} \ldots g_\mu = g$; portanto, deve haver um lugar x_0 em cujo domínio existem infinitamente muitos lugares $\frac{\mu}{a}$. Se você tomar um intervalo tão pequeno $x_0 - \delta \ldots x_0 \ldots x_0 + \delta$, então você pode ter muitas infinitos domínios $\frac{\mu}{a} \ldots \frac{\mu+1}{a}$ entre $x_0 - \delta$ e $x_0 + \delta$. Consequentemente, o limite superior de $x_0 - \delta \ldots x_0 + \delta$ é idêntico ao $\frac{\mu}{a} \ldots \frac{\mu+1}{a}$, ou seja, igual a g, q.e.d..

É uma questão que ocorre frequentemente se há um máximo ou um mínimo (máximo e mínimo no sentido absoluto) entre os valores que uma grandeza pode assumir. Seja y uma função contínua de x , $y = f(x)$. x deve estar entre dois certos limites de a e b. Em que circunstâncias há um máximo e um mínimo para y ? Há um limite superior para o y . Então, de acordo com o nosso teorema, deve haver um lugar x_0 no domínio de x , de modo que entre $x_0 - \delta$ e $x_0 + \delta$ o limite superior de y também é g. O x_0 está localizado dentro de $a \ldots b$ ou na fronteira ($x_0 = a$ ou $x_0 = b$).



No primeiro caso, $f(x_0)$ é um máximo. Ou seja, $f(x_0)$ deve ser igual a g: Uma vez que $f(x) - f(x_0)$ pode ser considerado tão pequeno quanto se quer, tornando suficientemente pequeno $|x - x_0|$, mas, por outro lado $f(x)$, porque x se encontra no intervalo $x_0 - \delta \ldots x_0 + \delta$, para cuja proximidade a grandeza g pode ser trazida arbitrariamente, então deve ocorrer que $f(x_0) = g$ (Se $f(x_0) = g + h$, então $f(x) - f(x_0) = f(x) - g - h$, e $f(x)$ não poderia chegar arbitrariamente perto do g se não fosse $h = 0$).

Mas se x_0 coincide com a ou b, então só se pode provar a partir de um respectivo b tal que $f(a)$ respectivamente $f(b)$ é um máximo se $f(x)$ também é expresso em um respectivo b que muda continuamente.

Se x' estiver entre a e b e se $f(x') > f(a), f(b)$, então o valor x_0 só pode estar entre a e b. O que acaba de ser desenvolvido acima sobre o máximo pode ser imediatamente transferido para o mínimo.

Analogamente, isso também se aplica a funções de várias variáveis. Seja $y = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ uma função contínua das variáveis $x_1, x_2 \ldots x_n$, então existe sempre para o valor de y entre dois lugares ($a_1, a_2 \ldots a_n$) e ($b_1, b_2 \ldots b_n$) um limite superior g e, no intervalo entre os mesmos lugares, um lugar de destaque ($x_1^0, x_2^0, x_3^0 \ldots x_n^0$), em cujo domínio, embora pequeno, o limite superior do y também é g pertencente aos lugares do domínio. Isto novamente leva à conclusão de que se ($x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$) é maior que $(a_1, a_2 \ldots a_n)$ e inferior a $(b_1, b_2 \ldots b_n)$, $f(x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0) = g$ e, portanto, um máximo dos valores da função; mas se $(x_1^0, \ldots x_n^0)$ com um dos lugares de fronteira $(a_1, \ldots)$, $(b_1, \ldots)$ coincide, $f(x_1^0, \ldots x_n^0)$ apenas é um máximo se a função em si no lugar $(a_1, a_2 \ldots a_n)$ respectivamente $(b_1, b_2 \ldots b_n)$ está em mudança contínua.

Todas as proposições que estabelecemos acima para domínios de variáveis reais, podem ser imediatamente transferidas para domínios de variáveis complexas, uma vez que cada variedade de n variáveis complexas determina uma variedade de 2^n variáveis reais considerando as coordenadas de cada uma das variáveis complexas. Por exemplo, um domínio de uma variável complexa $u + vi$ evoca um domínio de dupla multiplicidade de duas variáveis (u, v).

Kapitel 9

$\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ als metrische topologische Räume

9. 1 Offene Mengen und Zusammenhangskomponenten

Eine unbeschränkt veränderliche reelle Größe ist eine solche, die alle Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen kann; sämmtliche Punkte einer Geraden repräsentieren das Gebiet einer solchen Veränderlichen. Wir denken uns nun einen Verein von unbeschränkt veränderlichen Größen (Im Folgenden handelt es sich nur um reelle Größen; auf complexe Veränderliche lässt sich alles folgende leicht übertragen) Jedes bestimmte System der Veränderlichen heißt eine Stelle im Gebiet der Größen. Sind $x_1,\ x_2\ \dots\ x_n$ die Variabeln, $a_1,\ a_2\ \dots\ a_n$ eine Stelle in ihrem Gebiete was so zu verstehen ist, daß $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2 \dots x_n = a_n$ im Werthesystem ist, so ist, wenn $|x_1' - a_1| < \delta$, $|x_2' - a_2| < \delta \dots |x_n' - a_n| < \delta$, $x_1', x_2' \dots x_n'$ eine Stelle in der Umgebung δ der Stelle $a_1,\ a_2\ \dots\ a_n$. x_ν' liegt zwischen $a_\nu + \delta$ und $a_\nu - \delta$.

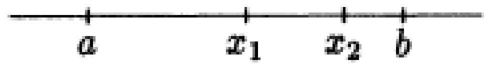
In dem Gebiete einer unbeschränkt Veränderlichen x sei in irgend welcher Weise eine unendliche Anzahl von Stellen definiert; die Gesammheit dieser Stellen werde durch x' bezeichnet. Dann können die x' entweder durch discrete oder durch continuierlich aufeinander folgende Punkte einer Geraden repräsentiert sein im letztern Falle sagt man, sie bilden ein Continuum. Dieses ist analytisch so zu definieren: Ist a eine Stelle des definierten Gebietes x'', und liegen in einer hinreichend klein gewählten Umgebung von a sämmtliche Stellen dieser Umgebung in dem Gebiete x', so bilden die x' ein Continuum.

In einer Umgebung einer Stelle a eines Gebietes x' liege eine andere Stelle a_1, so daß sämmtliche Stellen des Intervalls a bis a_1 zu dem Gebiete x' gehören; a_2 habe in Bezug auf a_1 dieselbe Eigenschaft wie a_1 in Bezug auf a; ebenso möge sich a_3 zu a_2, a_4 e $a_3\ \dots\ a_n$ zu a_{n-1} verhalten.

Dann sagen wir, es sei von a_1 zu $a_n$ein continuierlicher Übergang möglich. Zwischen a und b sei kein continuierlicher Übergang im Gebiete x' möglich, so gehört aber zu a, wie zu b ein ganzes Continuum von Werten x'. Es besteht also ein Gebiet, in welchem continuierliche Übergänge von einer Stelle zu einer andern möglich sind, aus einem oder mehreren getrennten continuierlichen Stücken. Was unter den Grenzen eines continuierlichen Stückes zu verstehen ist, ist unmittelbar klar.

Alles dieses läßt sich ohne Schwierigkeit auf ein Gebiet von n Variabeln auf eine n-fache Mannigfaltigkeit übertragen. Für $n = 3$ läßt es sich noch geometrisch veranschaulichen, was es heißt, von einer Stelle zu einer andern finde ein continuierlicher Übergang statt.

Die Möglichkeit eines continuierlichen Überganges von einer Stelle zu einer andern ruft auch die von der letztern zur ersten hervor.



Dies ist nicht selbstverständlich, denn z. B. wird es eine Umgebung von x_1 geben, die x_2 enthält, aber nicht umgekehrt eine Umgebung von x_2, die x_1 enthält, denn die Umgebung von x_2 darf nicht größer als $\overline{x_2 b}$ sein. Man braucht aber zwischen x_1 und x_2 nur solche Stellen einzuschalten, welche zwischen x_1 und x_2 solche Intervalle bilden, die kleiner oder gleich $\overline{x_2 b}$ sind, um zu zeigen, daß auch von b nach a ein continuierlicher Übergang möglich ist, wenn er es von a nach b war.

9.2 Supremumsprinzip und Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS für $\mathbb{R}$

g heißt die obere Grenze einer veränderlichen Größe, wenn es keinen Werth der Veränderlichen giebt größer als g und wenn in dem Intervall $g - \delta \ldots g$, δ sei eine noch so kleine Größe, sich noch immer Stellen des Gebietes der Veranderlichen vorfinden. g' ist die untere Grenze, wenn es keinen Werth der Variabeln giebt kleiner als g' und wenn in jedem, noch so kleinen Intervall $g' \ldots g' + \delta$ sich Stellen des Gebietes vorfinden. Ob g und g' selbst dem Gebiete angehören oder nicht, ist gleichgültig. (g kann gleich ∞ und g' gleich $-\infty$ werden).

"Jedes Gebiet einer veränderlichen Größe hat eine obere und eine untere Grenze." Wir nehmen an, die Veränderlichen sei nur positiver Werthe fähig und könne nicht gleich ∞ werden. Der allgemeine Fall läßt sich dann leicht auf diesen speciellen zurückführen. Dem Beweise unseres Satzes schicken wir folgendes voraus: a_0, a_1, $a_2 \ldots$ sei eine Reihe von Zahlen, die nicht abnehmen und sämmtlich kleiner als eine angebbare (endliche) Größe g sind. Bilden wir dann die Zahlen $b_1 = a_1 - a_0$, $b_2 = a_2 - a_1 \ldots b_v = a_v - a_{v-1} \ldots$, so ist $b = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ in inf. eine endliche Größe. Die Summe von beliebig vielen Gliedern der Reihe b_1, b_2, $b_3 \ldots$, von welchen b_n den höchsten Index habe, ist nämlich kleiner oder gleich $a_n - a_0$, also sicherlich kleiner als g, daher $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ endlich.

Eine Stelle, die in unserm Gebiete liegt, werde wieder durch x' bezeichnet. a sei eine positive ganze Zahl. Ich betrachte nun die Zahlenreihe $\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \frac{3}{a}, \frac{4}{a} \ldots$. Von x'

haben wir vorausgesetzt, daß x' beständig größer als 0 und kleiner als G, wo G eine positive Zahl bedeutet. Man kommt daher in der obigen Zahlenreihe zu einem ersten Gliede, daß größer oder gleich G und also auch größer als jeder Werth, den x' annehmen kann, ist. In dem Intervalle $\frac{a_1}{a} \dots \frac{a_1+1}{a}$ müssen dann nothwendig eine oder mehrere Stellen, die zu dem Gebiete gehören, liegen, wenn wir unter $\frac{a_1+1}{a}$ das erste Glied der Zahlenreihe verstehen, das alle für x' zulässigen Werthe an Größe übertrifft. In dieser Weise gehört zu jeder Zahl a eine Zahl a_1. Zu den Gliedern der Reihe $a, a^2, a^3, a^4, \dots a^n \dots$ mögen so die Zahlen $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots a_n \dots$ gehören, so daß in jedem der Intervalle

$$\begin{array}{c}
\frac{a_1}{a} \dots \frac{a_1+1}{a} \\
\frac{a_2}{a^2} \dots \frac{a_2+1}{a^2} \\
\frac{a_3}{a^3} \dots \frac{a_3+1}{a^3} \\
\vdots \\
\frac{a_n}{a^n} \dots \frac{a_n+1}{a^n}
\end{array}$$

mindestens Eine Stelle des Gebietes x' liegt.

Wir wollen nun zeigen, daß in der Reihe $\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a^2}, \frac{a_3}{a^3}, \dots, \frac{a_n}{a^n} \dots$ jedes Glied größer ist als das vorhergehende. Dazu zerlegen wir das Intervall $\frac{a_n}{a^n} \dots \frac{a_n+1}{a^n}$ in die Reihe von Intervallen:

$$\text{I.} \quad \left\{ \begin{array}{r}
\frac{a_n}{a^n} \dots \frac{a_n}{a^n} + \frac{1}{a^{n+1}} \\
\frac{a_n}{a^n} + \frac{1}{a^{n+1}} \dots \frac{a_n}{a^n} + \frac{2}{a^{n+1}} \\
\vdots \\
\frac{a_n}{a^n} + \frac{a-1}{a^{n+1}} \dots \frac{a_n}{a^n} + \frac{a}{a^{n+1}} .
\end{array} \right.$$

Mindestens muß es in Einem dieser Intervalle Stellen der definierten Art geben (Stellen x') da es deren in dem Intervalle $\frac{a_n}{a^n} \ldots \frac{a_n + 1}{a^n}$ gab. Das Intervall $\frac{a_n}{a^n} + \frac{m-1}{a^{n+1}} \ldots \frac{a_n}{a^n} + \frac{m}{a^{n+1}}$ sei das letzte, welches von den Intervallen I. Stellen x'enthält. Dieses Intervall $\frac{a \cdot a_n + (m-1)}{a^{n+1}} \ldots \frac{a \cdot a_n + m}{a^{n+1}}$ ist aber identisch mit dem Intervall $\frac{a_{n+1}}{a^{n+1}} \ldots \frac{a_{n+1}+1}{a^{n+1}}$, also $a_{n+1} = a \cdot a_n + m - 1$, daher $\frac{a_{n+1}}{a^{n+1}} \geq \frac{a_n}{a^n}$, wie behauptet wurde.

Bilden wir nun die Differenzen $b_0 = \frac{a_1}{a}$, $b_1 = \frac{a_2}{a^2} - \frac{a_1}{a}$,, $b_2 = \frac{a_3}{a^3} - \frac{a_2}{a^2}$, $b_3 = \frac{a_4}{a^4} - \frac{a_3}{a^3} \ldots$, und die Summen

$$b_0 = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = \frac{a_1}{a} + \frac{m_1 - 1}{a^2} + \frac{m_2 - 1}{a^3} + \ldots ,$$

so ist b die obere Grenze des Gebietes x'.

b ist nämlich zuvörderst eine endliche Größe (vgl. p. 84). Die Summe der n ersten Glieder von b ist $\frac{a_n}{a^n}$, also $b > \frac{a_n}{a^n}$ (alle Glieder von b sind ja positive Zahlen); aber $b \leq \frac{a_n + 1}{a^n}$. Es kann keinen Werth von x' geben, der größer b ; denn durch hinreichend groß gewähltes n kann b dem $\frac{a_n + 1}{a^n}$so nahe gebracht werden, als man nur will, und es giebt keinen Werth von x' größer $\frac{a_n + 1}{a^n}$. Da ferner b immer zwischen $\frac{a_n}{a^n}$ und $\frac{a_n + 1}{a^n}$ liegt, zwischen diesen Grenzen aber mindestens ein Werth von x' liegt und, wie eben gezeigt, kein Werth von x' größer b ist, folgt, daß zwischen b und $b - \delta$ immer mindestens ein Werth x' liegt (δ irgend eine, noch so kleine Größe).

“In jedem discreten Gebiete von einer Mannigfaltigkeit, welches unendlich viele Stellen enthält, giebt es mindestens eine Stelle, die dadurch ausgezeichnet ist, daß in jeder noch so kleinen Umgebung derselben sich unendlich viele Stellen des Gebietes vorfinden."

(Stellt man das Gebiet durch Punkte einer Curve, etwa einer Geraden, dar, so findet in dieser Stelle gewissermaßen eine Verdichtung des Gebietes statt.) Z. B.: Ist $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ in inf. eine convergente Reihe, so bilden die Größen $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 \ldots$, wo unter $s_n \sum_{i=0}^{n} a_i$ verstanden ist, ein discretes Gebiet von unendlich vielen Stellen. Die Stelle, in deren Umgebung, sei dieselbe noch so klein, sich unendlich viele andere Stellen des Gebietes finden, ist hier s , die Summe der Reihe. Es ist nämlich $s - s_n < \delta$ oder $s - \delta < s_n$, wenn δ eine beliebige klein gewälte Größe ist, und, nach Wahl von δ , n

größer als eine bestimmte Zahl angenommen wird. Es liegen also zwischen s und $s - \delta$, δ sei noch so klein, unendlich viele Größen s_n.

Wir nehmen (zum Beweise unseres Satzes) zunächst an, daß die definierten Stellen innerhalb zweier Grenzen g_0 und g_1 enthalten sind.

a sei eine beliebige ganze Zahl. Wir bilden die Reihe der

$$\text{I.} \qquad -\frac{m}{a}, -\frac{m-1}{a}, -\frac{m-2}{a}, \dots, -\frac{1}{a}, 0, +\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \dots, \frac{n-2}{a}, \frac{n-1}{a}, \frac{n}{a}.$$

II.

Dieselbe ist nach links soweit fortgesetzt, daß $-\frac{m}{a} < g_0$ist, und nach rechts so weit, daß $\frac{n}{a} > g_1$ist. Betrachten wir nun sämmtliche Intervalle in der Reihe I. $\frac{\mu}{a} \dots \frac{\mu+1}{a}$ nur endlich viele Glieder hat, so ist klar, daß mindestens Eines unter denselben sein muß, innerhalb dessen unendlich viele Stellen des definierten Gebietes liegen; denn es sind ja unendlich viele Stellen definiert und nur endlich viele Intervalle. Das erste Intervall, welches unendlich viele Stellen des Gebietes fasst, sei $\frac{\mu_1}{a} \dots \frac{\mu_1+1}{a}$. Unterhalb $\frac{\mu_1}{a}$ giebt es also nur vereinzelte Stellen des Gebietes. Zu jeder Zahl a gehört nun eine Zahl μ_1; wir bilden die letztern zu den Zahlen der Reihe $a, a^2, a^3, \dots$ und bezeichnen die zugehörigen μs durch $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots$. Dann haben wir die Reihe von Intervallen:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\mu_1}{a} \dots \frac{\mu_1+1}{a} \\ \frac{\mu_2}{a^2} \dots \frac{\mu_2+1}{a^2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\mu_n}{a^n} \dots \frac{\mu_n+1}{a^n} \\ \frac{\mu_{n+1}}{a^{n+1}} \dots \frac{\mu_{n+1}+1}{a^{n+1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}\right\}$$

von denen wir wissen, daß jedes unendlich viele Stellen des Gebietes enthält und daß unterhalb der untern Grenze jedes Intervalls nur noch endlich viele Stellen des Gebietes liegen. Daraus können wir schließen: $\frac{\mu_{n+1}+1}{a^{n+1}} > \frac{\mu_n}{a^n}$ und $\frac{\mu_{n+1}}{a^{n+1}} < \frac{\mu_n+1}{a^n}$, also:

$$1) \quad \mu_{n+1} + 1 > a \cdot \mu_n \qquad \text{und} \qquad 2) \quad \mu_{n+1} < a \cdot \mu_n + a$$

Aus 1) können wir folgern (da es sich um eine Einheit handelt): $\mu_{n+1} \geq a \cdot \mu_n$ und $\frac{\mu_{n+1}}{a^{n+1}} \geq \frac{\mu_n}{a^n}$. Die Zahlen $\frac{\mu_1}{a}, \frac{\mu_2}{a^2}, \frac{\mu_3}{a^3}, \frac{\mu_4}{a^4} \dots$ bilden also eine Reihe von wachsenden Größen, von denen jedoch keine die Grenze überschreitet, über die hinaus sich keine Stellen des Gebietes vorfinden. Daher ist

$$\text{I. } A = \frac{\mu_1}{a} + \frac{\mu_2 - a\ \mu_1}{a^2} + \frac{\mu_3 - a\ \mu_2}{a^3} + \dots$$

eine endliche Größe (vgl. p. 84), und ich behaupte, A ist eine solche Stelle, in deren Umgebungen sich unendlich viele Stellen des Gebietes finden. Man kann nämlich zu jeder Umgebung $A - \delta \dots A + \delta$ von A durch hinreichend groß gewältes r Intervalle $\frac{\mu_r}{a^r} \dots \frac{\mu_r + 1}{a^r}$ finden, die ganz innerhalb des Intervalls $A - \delta \dots A + \delta$ liegen, so daß, da zwischen $\frac{\mu_r}{a^r} \dots \frac{\mu_r + 1}{a^r}$ unendlich viele Stellen des Gebietes liegen, dies auch für da Intervall $A - \delta \dots A + \delta$ gilt. – Die Größe A ist eine vollkommen bestimmte. Wählt man z. B. $a = 10$, so erhalten wir A durch Gleichung I auf dieser Seite in Form eines Decimalbruchs.

9. 3 Anwendungen

$c_0, c_1, c_2 \dots$ in inf. sei eine Reihe von Zählgrößen. Man bilde $s_0 = c_0$, $s_1 = c_0 + c_1$, $s_2 = c_0 + c_1 + c_2 \dots$ so machen die Größen $s_0, s_1, s_2 \dots$ ein Gebiet von unendlich vielen discreten Stellen aus. Nehmen wir außerdem an, daß s_n eine angebbare Größe nicht überschreiten kann, so muß nach unserm Satze mindestens eine Stelle s existieren, in deren Umgebung, letztere sei so klein, wie man will, noch unendlich viele Stellen s_n liegen. Wir wollen nun zeigen, daß es nur Eine solche Stelle s geben kann, wenn noch vorausgesetzt wird, daß $s_n - s_{n+r}$ unendlich klein wird, wenn n unendlich groß wird ($s_n - s_{n+r}$ gleichzeitig mit $\frac{1}{n}$ unendlich klein wird) für jeden Werth von r.

Es mögen nämlich s und s' zwei solchen Stellen sein und $s < s'$. Da in jedem noch so kleinen Intervall $s - \delta \dots s + \delta$ unendlich viele Stellen s_n liegen, so müssen auch solche darin liegen, bei denen n jede beliebige Zahl übersteigt. ε sei eine beliebig klein gewählte Größe, so kann n so groß angenommen werden, daß $s_n - s_{n+r} < \varepsilon$ für jedes r. Liegt nun s_n innerhalb des Intervalls $s - \delta \dots s + \delta$, so liegt, da $s - s_{n+r} = s - s_n + \varepsilon'$, $\varepsilon' < \varepsilon$ ist, und ε und folglich auch ε' beliebig klein gewält werden kann, auch s_{n+r} für jedes r innerhalb des Intervalls. Keine Stelle s_m, für welche $m > n$, wo n eine angebbare Zahl ist, kann also über $s + \delta$ hinaus fallen, daher kann es auch über s hinaus keine Stelle s' mehr geben, welche dieselbe ausgezeichnete Stellung einnimmt wie s.

$y = f\ (x)$ sei eine stetige Funktion von x. "Gehört zu x_1 ein positiver Wehrt von y , zu x_2 ein negativer, so giebt es zwischen x_1 und x_2 einen Wehrt von x, für den $y = 0$ wird".

Man kann jedenfalls zwischen x_1 und x_2 zwei Werthe x_1' und x_2' so angeben, daß in dem Intervall $x_1 \dots x_1'$ y éimmer positiv und zwischen x_2' und x_2 immer negativ ist.

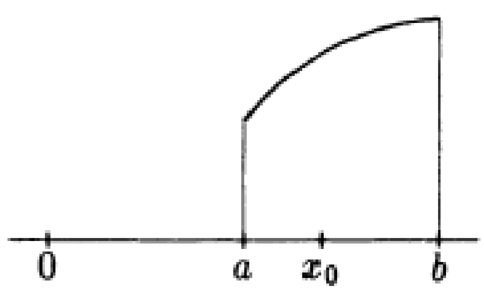
Ist nun a eine ganze Zahl, so daß $\frac{1}{a}$ kleiner als $x_1' - x_1$ und auch kleiner als $x_2 - x_2'$ (also auch $\frac{1}{a^n}$ kleiner als $x_1' - x_1$ und kleiner als $x_2 - x_2'$) , und betrachten wir die Intervalle $\frac{m}{a} \dots \frac{m+1}{a}$, …, $\frac{n-1}{a} \dots \frac{n}{a}$, wo $\frac{m+1}{a} > x_1 \geq \frac{m}{a}, \frac{n}{a} \geq x_2 > \frac{n-1}{a}$, so wird es unter diesen eine Anzahl geben, in denen y positiv ist, unter diesen muß es ein letztes geben, $\frac{\mu-1}{a} \dots \frac{\mu}{a}$, so daß es in dem Intervalle $\frac{\mu}{a} \dots \frac{\mu+1}{a}$aufhört, daß in demselben y beständig positiv ist.

So gehört zu jeder Zahl a eine Zahl μ, und alle Zahlen $\frac{\mu}{a}$ liegen zwischen x_1 und x_2. Betrachten wir nun etwa alle Stellen $\frac{\mu}{a}, \frac{\mu_2}{a^2}, \frac{\mu_3}{a^3}$, …, alle Stellen $\frac{\mu}{a}$ für die Zahlenreihe a, a^2, a^3 …,so muß es zwischen x_1 und eine Stelle x_0 geben, so daß in jeder noch so kleinen Umgebung $x_0 - \delta \dots x_0 \dots x_0 + \delta$ derselben sich Stellen $\frac{\mu_\lambda}{a^\lambda}$ in unendlicher Anzahl finden. Da aber y eine stetige Funktion von x sein soll, so kann ich nach Annahme von ε δ so klein wählen, daß in dem Intervalle $x_0 - \delta \dots x_0 \dots x_0 + \delta$ $y - y_0 < \varepsilon$ bleibt (y_0 ist gleich $f(x_0)$). In dem Intervalle $x_0 - \delta \dots x_0 + \delta$ liegen aber Intervalle $\frac{\mu_n}{a^n} \dots \frac{\mu_n+1}{a^n}$ganz drin. Wäre nun y_0 positiv, so könnte ε so klein gewählt werden, daß y zwischen $x_0 - \delta$ und $x_0 + \delta$ beständig positiv wäre; wäre y_0 negativ, so könnte ε so klein genommen werden, daß y beständig negativ zwischen $x_0 - \delta$ und $x_0 + \delta$ wäre. Beides ist nicht zulässig; also muß $y_0 = 0$ sein, q.e.d..

Der Satz über die obere Grenze ist ein specieller Fall des Satzes über den Verdichtungspunkt. Alle Stellen irgend eines Gebietes mögen zwischen 0 und G liegen. Unter der Reihe von Zählen 0, $\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \frac{3}{a} \dots \frac{m}{a} \dots$ giebt es eine erste Zahl, die größer ist als jede beliebige der Stellen des Gebietes. Diese erste sei $\frac{\mu+1}{a}$, so liegt zwischen $\frac{\mu}{a}$ und $\frac{\mu+1}{a}$ mindestens noch eine Stelle des Gebietes. Zu jeder Zahl a gehört so eine Zahl μ; wir erhalten also unendlich viele Stellen $\frac{\mu}{a}$. Es muß nun nach unserm Satz eine Stelle g geben, in deren Umgebung, sie sei noch so klein, sich Stellen $\frac{\mu}{a}$ finden. Die Stelle g ist die obere Grenze; denn in jedem Intervall $g - \delta \ldots g$, δ sei so klein, wie es will, findet sich mindestens eine Stelle des definierten Gebietes; a kann nämlich jede beliebige Größe überschreiten, da in der Umgebung von g sich unendlich viele Stellen $\frac{\mu}{a}$ finden. Man kann nun a so groß wählen, daß $\frac{1}{a} < \delta$ wird, so daß also das Intervall $\frac{\mu}{a} \ldots \frac{\mu+1}{a}$ ganz in der Umgebung δ von g liegt. Ferner kann es keine Stelle des Gebietes geben größer als g, da im entgegengesetzten Falle Intervalle $\frac{\mu}{a} \ldots \frac{\mu+1}{a}$ existieren würden, über welche hinaus noch Stellen des Gebietes liegen.

9. 4 Gleichmäßige Stetigkeit

Man kann für die Stetigkeit einer Funktion folgende Definition geben: " $f(x)$ (wo x nur reelle Werthe annehmen soll) ist stetig zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$, wenn nach Annahme einer beliebig kleinen Größe ε eine Zahl δ von der Art gefunden werden kann, daß für alle Werthe x_1 und x_2, für welche $|x_1 - x_2| < \delta$ ist, $|f(x) - f(x_2)| < \varepsilon$ wird." Es soll gezeigt werden, daß diese Definition mit der früher gegebenen übereinstimmt. Wir theilen, vom Nullpunkt ausgehend, die Gerade $\overline{ab}$ in Intervalle $\frac{m}{a_1} \ldots \frac{m+1}{a_1}$, wo a_1 eine ganze positive Zahl ist und m alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft.



Zwischen a und b fallen nur endlich viele solcher Intervalle. In jedem dieser Intervalle hat $f(x)$ eine obere und eine untere Grenze; also auch $(f(x_2) - f(x_1))$ eine obere Grenze. Dasjenige Intervall, in welchem diese obere Grenze den größten Werth hat, greifen wir heraus; es sei $\frac{\mu}{a_1} \ldots \frac{\mu+1}{a_1}$. Lassen wir a_1 alle positiven ganzen Zahlen durchlaufen, so erhalten wir unendlich viele solcher Intervalle $\frac{\mu}{a_1} \ldots \frac{\mu+1}{a_1}$ (zwischen a und b). Es giebt also eine solche Stelle x_0 , in deren Umgebung unendlich viele Stelle $\frac{\mu}{a_1}$ liegen. Es läßt sich nun, da wir f zwischen a und b nach unserer früheren Definition als stetig annehmen, ξ finden, so dass für $|h| < \xi \quad |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \frac{1}{4}\varepsilon$ ist.

Wenn dann x' und x'' in dem Intervalle $x_0 - \xi \ldots x_0 + \xi$ liegen, so ist: $|f(x') - f(x_0)| < \frac{1}{4}\varepsilon$ und $|f(x'') - f(x_0)| < \frac{1}{4}\varepsilon$, folglich $|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{4}\varepsilon$.

Es lässt sich jetzt, da bei x_0 unendlich viele Stellen $\frac{\mu}{a_1}$ liegen, a_1 so groß annehmen, daß das Intervall $\frac{\mu}{a_1} \ldots \frac{\mu+1}{a_1}$ ganz innerhalb des Intervalls $x_0 - \xi \ldots x_0 + \xi$ liegt. Für Werthe von x_1 und x_2 , die innerhalb des Intervalls $\frac{\mu}{a_1} \ldots \frac{\mu+1}{a_1}$ liegen, für welche also $|x_1 - x_2| < \frac{1}{a_1}$, ist also auch $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Da unter allen Intervallen $\frac{m}{a_1} \ldots \frac{m+1}{a_1}$ dem Intervall $\frac{\mu}{a_1} \ldots \frac{\mu+1}{a_1}$ die größte obere Grenze der Differenz $|f(x_1) - f(x_2)|$, zukommt, so ist für je zwei andere Werthe x_1 und x_2, welche der Bedingung $|x_1 - x_2| < \frac{1}{a_1}$ genügen, wenn beide Werthe in ein und demselben Intervalle $\frac{m}{a_1} \ldots \frac{m+1}{a_1}$ liegen, ebenfalls $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Liegen x_1 und x_2 aber in zwei verschiedenen (natürlich aufeinanderfolgenden) Intervallen $\frac{m}{a_1} \ldots \frac{m+1}{a_1}$ und $\frac{m+1}{a_1} \ldots \frac{m+2}{a_1}$, so ist gewiß $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Wir können also in der That eine Zahl $\delta = \frac{1}{a_1}$ finden, so dass wenn nur $|x_1 - x_2| < \delta$ wird, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ ausfällt, wo ε die beliebig klein angenommene Größe war.

Unsere erste Definition der Stetigkeit hat also die in der zweiten Definition ausgesprochene Eigenschaft als Folge.

9.5 Princípio do Supremo e Teorema de BOLZANO-WEIERSTRASS para $\mathbb{R}^n$; máximos e mínimos

Ist a eine ganze (positive) Zahl, so bezeichnet wir mit $\left(\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a}, \frac{a_3}{a} \dots \frac{a_\nu}{a} \dots \frac{a_n}{a}\right)$ einen bestimmten Bezirk, nämlich die Gesamtheit der Wertesystem von $x_1, x_2, x_3 \dots x_\nu \dots x_n$, bei welchen x_ν zwischen $\frac{a_\nu}{a}$ und $\frac{a_\nu + 1}{a}$ liegt.

Wir nehmen nun an, daß unendlich viele Stellen (Wertesysteme) $x_1, x_2 \dots x_n$ definiert sein, und zwar soll keine der Stelle kleiner als eine angebbare und keine größer als eine andere angebbare Stelle sein. Es wird dann unter den Bereichen $\left(\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a}, \dots \frac{a_n}{a}\right)$ [$a_1, a_2 \dots a_n$ sind ganze positive oder negative Zahlen.] einen ersten geben, in welchem sich unendlich viele der definierten Stellen geben. Diesen ersten Bereich zertheile ich wieder in Unterbereiche, indem das Intervall $\frac{a_\lambda}{a} \dots \frac{a_\lambda + 1}{a}$ in die Theilintervalle

$$\frac{a_\lambda}{a} \dots \frac{a_\lambda}{a} + \frac{1}{a^2}; \frac{a_\lambda}{a} + \frac{1}{a^2} \dots \frac{a_\lambda}{a} + \frac{2}{a^2}; \dots \frac{a_\lambda}{a} + \frac{a-1}{a^2} \dots \frac{a_\lambda}{a} + \frac{a}{a^2}$$

zerlegt wird. So erhalten wir a^n Unterbereich zu dem Bereich $\left(\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a} \dots \frac{a_n}{a}\right)$ die ganz in dem letztern liegen. $\left(\frac{a_1'}{a^2}, \frac{a_2'}{a^2} \dots \frac{a_n'}{a^2}\right)$ sei der erste dieser Unterbereiche, der unendlich viele Stellen des Gebietes in sich faßt. Aus dem Bereiche $\left(\frac{a_1'}{a^2}, \dots \frac{a_n'}{a^2}\right)$ leitet sich dann ein Bereich $\left(\frac{a_1''}{a^3}, \dots \frac{a_n''}{a^3}\right)$ ab, welcher ganz innerhalb desselben liegt und (von den Unterbereichen des Bereichs $\left(\frac{a_1'}{a^2}, \dots \frac{a_n'}{a^2}\right)$) der erste ist, welcher unendlich viele Stellen enthält. Fährt man so fort, so erhält man immer engere und engere Bereiche, innerhalb derer sich noch unendlich viele Stellen des Gebietes finden, und die Stelle

$$\begin{cases} A_1 & = & \frac{a_1}{a} + \frac{a_1' - aa_1}{a^2} \frac{a_1'' - aa_1'}{a^3} + \dots \\ A_2 & = & \frac{a_2}{a} + \frac{a_2' - aa_2}{a^2} \frac{a_2'' - aa_2'}{a^3} + \dots \\ A_3 & = & \frac{a_3}{a} + \frac{a_3' - aa_3}{a^2} \frac{a_3'' - aa_3'}{a^3} + \dots \\ \vdots & & \qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

hat die Eigenschfat, daß in jeder noch so kleinen Umgebung δ derselben sich noch unendlich viele Stellen des Gebietes anfinden.

Es sein unendlich viele Stellen $(x_1, x_2 \dots x_n)$ definiert. Die Stelle $(c_1, c_2 \dots c_n)$ gehöre nicht zu dem definierten Gebiete. Setzt man dann

$$\xi_1 = \frac{x_1 - c_1}{(x_1 - c_1)^2 + \dots + (x_n - c_n)^2}, \ \xi_2 = \frac{x_2 - c_2}{(x_1 - c_1)^2 + \dots + (x_n - c_n)^2}, \dots$$

$$\xi_n = \frac{x_n - c_n}{(x_1 - c_1)^2 + \dots + (x_n - c_n)^2},$$

so entspricht jeder Stelle $x_1, x_2 \dots x_n$ eine Stelle $(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n)$, aber auch umgekehrt jeder Stelle $(\xi_1, \dots \xi_n)$ eine Stelle $x_1, \dots x_n$). Es ist nämlich

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = \frac{1}{(x_1 - c_1)^2 + \dots + (x_n - c_n)^2}$$

also

$$x_1 - c_1 = \frac{\xi_1}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}, \dots \ x_n - c_n = \frac{\xi_n}{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$$

Zu dem definierten Gebiete $x_1, \dots x_n$) erhält man so ein zugehöriges Gebiet $(\xi_1, \dots \xi_n)$, in welchem es keine unendlich große Stelle giebt, da $(c_1, c_2 \dots c_n)$ nach Voraussetzung keine Stelle des Gebietes $x_1, \dots x_n$) ist. Einer Grenzstelle des Gebietes (ξ) entspricht eine solche im Gebiete (x). Ist die erste Stelle $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \dots = 0$, so ist die letztere die Stelle $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = \infty$

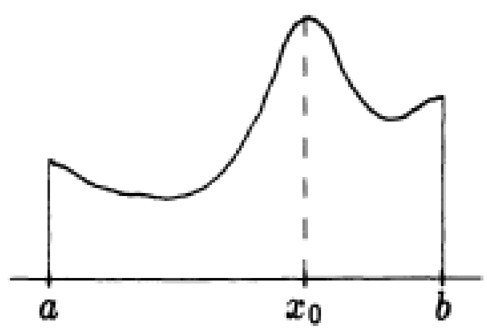
Einer Stelle $x_1, \dots x_n$) eines Gebietes entspreche immer eine Stelle y; dann ist auch y eine veränderliche Größe und hat also eine untere und eine obere Grenze; die letztere sei g . Dann giebt es [in dem Gebiete der x] (Es ist nicht nöthig, daß die Stelle zu dem definierten Gebiete gehört.) mindestens eine Stelle von folgender Beschaffenheit: Wenn ich irgend eine noch so kleine Umgebung derselben betrachte und für die in dieser Umgebung liegenden Stellen des Gebietes x die zugehörigen Werthe y betrachte, so haben diese

Werthe von y auch ihre Grenze und dieselbe ist gerade g . Ähnliches gilt für die untere Grenze.

Wir beweisen diesen Satz nur für ein Gebiet einer Variabeln x .

Wir betrachten sämmtliche Intervalle $\frac{\mu}{a} \dots \frac{\mu+1}{a}$, in denen x liegen, für welche es zugehörige y giebt. Für letztere giebt es in jedem solchen Intervall $\frac{\mu}{a} \dots \frac{\mu+1}{a}$ eine obere Grenze g_μ . Unter den sämmtlichen Intervallen muß es aber mindestens eins geben, für welches die obere Grenze $g_\mu = g$ ist, da ja sämtliche y zusammen betrachtet die obere Grenze g haben sollten. Giebt es mehrere Intervalle, für die $g_\mu = g$ist, so fassen wir irgend eins, z. B. das erste, derselben ins Auge. Es giebt nun unendlich viele Stelle $\frac{\mu}{a}$ (für jede Zahl a eine), so daß für $\frac{\mu}{a} \dots \frac{\mu+1}{a} \dots g_\mu = g$ ist; folglich muß es eine Stelle x_0 geben, in deren Umgebung unendlich viele Stellen $\frac{\mu}{a}$ liegen. Nimmt man nun einen noch so kleinen Bereich $x_0 - \delta \dots x_0 \dots x_0 + \delta$, so kann man unendlich viele Bereiche $\frac{\mu}{a} \dots \frac{\mu+1}{a}$ finden, die zwischen $x_0 - \delta$ nd $x_0 + \delta$liegen. Folglich ist die obere Grenze von $x_0 - \delta \dots x_0 + \delta$ identisch mit der $\frac{\mu}{a} \dots \frac{\mu+1}{a}$, also gleich g , q.e.d..

Es ist eine häufig vorkommende Frage, ob es unter den Werthen, die eine Größe annhemen kann, ein Maximum oder ein Minimum giebt (Maximum und Minimum im absoluten Sinne). y sei eine continuierliche Funktion von x , $y = f\ (x)$). x soll zwischen zwei bestimmten Grenzen a und b liegen. Unter welcher Umständen giebt es für y ein Maximum und ein Minimum? Es giebt für die y eine obere Grenze. Es muß also nach unserm Satze in dem Gebiete der x eine Stelle x_0 geben, so daß zwischen $x_0 - \delta$ und $x_0 + \delta$ die obere Grenze von y auch g ist. x_0 liegt entweder im Innern von $a \dots b$ oder an der Grenze ($x_0 = a$ oder $x_0 = b$).



Im ersten Falle ist $f(x_0)$ ein Maximum. Nämlich $f(x_0)$ muß gleich g sein: Da nämlich $f(x) - f(x_0)$ durch genügend klein gewähltes $|x - x_0|$ so klein gemacht werden kann, als man will, andererseits aber $f(x)$, da x in dem Intervallliegt, der Größe g beliebig nahe gebracht werden kann, so muß $f(x_0) = g$ sein. (Wäre $f(x_0) = g + h$, so wäre $f(x) - f(x_0) = f(x) - g - h$, und $f(x)$) könnte dem g nicht beliebig nahe kommen, wenn nicht $h = 0$ ist).

Stimmt aber x_0 mit a oder b überein, so kann man nur dann von a resp. b behaupten, daß $f(a)$ resp. $f(b)$ ein Maximum ist, wenn $f(x)$) sich auch noch in a resp. b stetig ändert.

Liegt x' zwischen a und b und ist $f(x') > f(a), f(b)$, so kann der Werth x_0 nur zwischen a und b liegen. Das, was eben über das Maximum entwickelt wurde, läßt sich sofort auf das Minimum übertragen.

Auch für Funktionen von mehreren Variablen gilt Analoges. Ist $y = f(x_1, x_2 \dots x_n)$ eine stetige Funktion der Variabeln $x_1, x_2 \dots x_n$, so giebt es für den Werth von y zwischen zwei Stellen $a_1, a_2 \dots a_n$ und $(b_1, b_2 \dots b_n)$ immer eine obere Grenze g und in dem Intervall zwischen denselben Stellen eine ausgezeichnete Stelle $(x_1^0, x_2^0, x_3^0 \dots x_n^0)$, in deren Umgebung, sie sei noch so klein, die obere Grenze der zu den Stellen der Umgebung gehörigen y auch g ist. Damit folgert man wieder, daß, wenn $(x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0)$ größer als $(a_1, a_2 \dots a_n)$ und kleiner als $(b_1, b_2 \dots b_n)$ ist, $f(x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0) = g$ und also ein Maximum der Funktionswerthe ist; daß aber, wenn $(x_1^0, \dots x_n^0)$ mit einer der Grenzstellen $(a_1, \dots)$, $(b_1, \dots)$ zusammenfällt, $f(x_1^0, \dots x_n^0)$ nur dann ein Maximum ist, wenn die Funktion sich an der Stelle $(a_1, a_2 \dots a_n)$ resp. $(b_1, b_2 \dots b_n)$ stetig ändert. –

Alle Sätze, die wir oben für Gebiete von reellen Variabeln aufgestellt haben, lassen sich sofort auf Gebiete von complexen Variabeln übertragen, indem jede n -fache Mannigfaltigkeit von complexen Variabeln eine 2^n -fache Mannigfaltigkeit von reellen Variabeln dadurch bestimmt, indem man die beiden Coordinaten einer jeden der complexen Variabeln betrachtet. Z.B. Ein Gebiet einer complexen Variabeln $u + vi$ ruft ein Gebiet zweifacher Mannigfaltigkeit von zwei reellen Variabeln (u, v) hervor.