*Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 22, nº 45 – pp. 82–105*
*Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática*
ISSN 1519-955X

# UMA HISTÓRIA DAS FLUXÕES ÀS DERIVADAS NA OBRA DE COLIN MACLAURIN

Iran Abreu Mendes
*Universidade Federal do Pará – UFPA – Brasil*

Evanildo Costa Soares
*Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN – Brasil*

(aceito para publicação em julho de 2022)

## Resumo

Em uma publicação de 1742, intitulada *A Treatise of Fluxions* (Um Tratado das Fluxões), Colin Maclaurin argumenta sobre o conceito de *fluxão*, medida pelo acréscimo ou decréscimo gerado em um determinado momento por meio do movimento considerado continuamente uniforme a partir das relações entre espaço e tempo. Neste artigo discorremos sobre um cenário do desenvolvimento histórico-epistemológico do conceito de derivada a partir das noções de fluxões presentes em produções matemáticas de Colin Maclaurin influenciadas pelo trabalho de Isaac Newton, visando traçar um mapa dos princípios que norteiam o conceito de derivada e suas regras de derivações, contextualizadas nas relações entre velocidade, espaço e tempo.

**Palavras-chave**: História, Fluxão, Cálculo, Derivada, Maclaurin.

## [A HISTORY OF THE DERIVATIVE FLUXIONS IN THE WORK OF COLIN MACLAURIN]

## Abstract

In a 1742 publication, entitled A Treatise of Fluxions, Colin Maclaurin argues on the concept of fluxion as measured by the increase or decrease generated at a given moment through the movement considered continuously uniform from the relations between space and time. In this article, we discuss a scenario of the historical-epistemological development of the concept of derivative from the notions of fluxions present in Colin Maclaurin's mathematical Productions influenced by the work of Isaac Newton, aiming to draw a map of the principles that guide the concept of derivative and its rules of derivations, contextualized in the relations between speed, space and time.

**Keywords:** History, Fluxion, Calculus, Derivative, Maclaurin.

## Introdução

O objetivo deste artigo é discorrer sobre o desenvolvimento de uma abordagem histórico-epistemológica do conceito de derivada a partir das noções de fluxões presentes em produções matemáticas de Colin Maclaurin. Neste sentido, caracterizamos os princípios que norteiam o conceito de fluxão, contextualizadas nas relações entre velocidade, espaço e tempo, uma vez que a noção de fluxo consiste da velocidade com que uma quantidade flui, em qualquer período do tempo em que se supõe que seja gerada. Com base em sua publicação de 1742, intitulada *A Treatise of Fluxions* (Um Tratado das Fluxões), Colin Maclaurin argumenta sobre o conceito de f*luxão* que, para o autor, é sempre medido pelo acréscimo ou decréscimo gerado em um determinado momento por esse movimento, se ele for continuamente uniforme a partir desse período.

O fundamento básico do artigo se ampara na premissa de que a investigação histórica sobre a formulação do conceito de derivada pode contribuir à formação conceitual e didática de professores de matemática, desde que o desenvolvimento epistemológico desse tema seja ressignificado a partir de produções matemáticas como as de Colin Maclaurin e outros trabalhos similares produzidos entre os séculos XVII e XVIII. Neste sentido, as discussões conceituais que emergiram das primeiras investigações relacionadas ao cálculo diferencial e integral nos livros de Colin Maclaurin tinham como finalidade compreender o processo de enunciação dos princípios norteadores sobre a ideia de derivada e seus métodos de derivações, a fim de oferecer possibilidades de abordagens para o ensino de cálculo em cursos de Licenciatura em Matemática, com base no seu tratado das fluxões, por meio da investigação histórica, conforme propõe Mendes (2006; 2009; 2015).

De fato, a utilização da história da Matemática para uma abordagem do cálculo diferencial e integral com caráter investigativo permite que os estudantes de graduação despertem para o aspecto criativo da matemática e acomodem significativamente as noções conceituais propostas pelo professor durante a aula. Quando recorremos aos dois volumes do tratado das fluxões de Maclaurin, identificamos como a abordagem estabelecida pelo autor poderá auxiliar o professor e os estudantes de graduação no que concerne a uma compreensão mais profunda acerca desse tema, principalmente porque as informações sobre o desenvolvimento histórico-epistemológico do tema podem conectar a origem e a formalização dos conceitos sobre derivada, como possibilidade de desenvolver a cognição dos estudantes por meio da investigação histórica como agente de cognição em sala de aula (MENDES, 2006; 2022).

O princípio que articula as atividades de ensino e aprendizagem por meio da investigação histórica da matemática, constitui-se no sustentáculo da proposta defendida por Mendes (2006; 2009; 2015), resultantes de seus estudos, pesquisas e reflexões ligadas ao tema. Portanto, neste artigo reiteramos que o uso da investigação histórica sobre temas como o que focalizamos nas próximas seções pressupõe a valorização do saber e do fazer históricos na ação cognitiva de quem investiga para compreender. Portanto, tomamos a investigação histórica como fundamento da pesquisa que originou este artigo, por considerar que se trata de um processo que desenvolve a autonomia de quem investiga e contribui para a compreensão e construção do conhecimento matemático.

Com base nas considerações apresentadas anteriormente, reiteramos nosso pressuposto de que a partir de uma compreensão mais prática da ideia de fluxão, será possível abordar o conceito de derivada de maneira investigativa que amplie a capacidade de pensar e problematizar do estudante acerca desse objeto. Neste sentido, atentamos que o uso dos livros de Maclaurin sobre o tema pode ser um forte aliado à formulação de uma abordagem conceitual que propicie a compreensão do assunto no ensino de cálculo no ensino superior de Matemática.

## Do conceito de derivada em artigos brasileiros mais recentes

Nas últimas duas décadas foram publicados alguns artigos resultantes de estudos e pesquisas relacionados ao cáculo diferencial e integral, à análise infinitesimal ou aos estudos sobre limites e infinitos que, de um certo modo e conforme os objetivos dos autores, referem-se, também ao desenvolvimento histórico-epistemológico do conceito de derivada em suas múltiplas formas de interpretação e representação, que atualmente se constituem nas múltiplas escritas ideográficas[1] acerca desse conceito.

Em uma breve revisão bibliográfica sobre o tema deste artigo identificamos alguns que remetem direta ou indiretamente ao conceito de derivada, dente os quais destacamos quatro artigos. No primeiro deles, publicado em 2001, intitulado *O que a história do desenvolvimento do cálculo pode nos ensinar quando questionamos o saber matemático, seu ensino e seus fundamentos* (GEROMEL MENEGHETTI; BICUDO, 2002), seus autores mostram a existência de relações entre a instituição dos princípios filosóficos relativos à matemática, a história de seu desenvolvimento epistemológico (da própria matemática), e consequentemente do ensino da matemática.

Igualmente, identificamos outro artigo, de autoria de Ligia Sad (2002), intitulado *Problemas epistemológicos no período de emergência do cálculo infinitesimal*, que apresenta uma abordagem analítica acerca dos problemas epistemológicos do cálculo infinitesimal, no período de emergência dos conceitos referentes a esse assunto. As

[1] A respeito do significado da expressão escrita ideiográfica como aquela que é materializada com o objetivo de promover uma representação da linguagem por meio do uso de ideogramas ou símbolos que representam as ideias intencionadas na mensagem elaborada. A escrita da história da matemática mostra que ao longo dos milênios a representação dos objetos matemáticos foi se estabelecendo por meio dessas escritas ideiográficas, que representam os modos de compreender e explicar fatos matemáticos.

discussões de Sad (2002) fundamentam-se nas relações interpretativas do desenvolvimento histório do cálculo diferencial apoiada na Teoria dos Campos Semânticos, proposta por Romulo Lins.

Neste sentido Sad (2002, p. 66) menciona que a produção social dos objetos matemáticos ao longo da sua criação histórica torna importante destacar a função semiótica (na representação pelo uso de signos, dos semas) e semântica (na produção de significados literais) na leitura dos discursos escolhidos para análise epistemológica. A esse respeito Sad (idem) reitera que ao se trabalhar uma investigação histórica, conduz-se a atenção às ideias articuladas a partir de um discurso (texto), observando as convergências e diversificações possíveis enquanto a produção de significados, objetos e conhecimentos, por sua vez, são também influenciadas e compalidas à convergência dos próprios significados atuais.

Ainda a respeito do tema em questão, identificamos o artigo intitulado *George Berkeley e os fundamentos do Calculo Diferencial e integral* (D`OTTAVIANO; BERTATO, 2015), no qual seus autores analisam as críticas de Berkeley a respeito do trabalho de Isaac Newton, posteriormente continuadas por Maclaurin, concernentes aos conceitos relacionados às representações do cálculo no século XVIII. Neste sentido, os autores abordam aspectos referentes às criticas de Berkeley ao método das fluxões e à inconsistência na introdução da noção de infinitésimo por Newton, no final do século XVII ao introduzir suas proposições sobre o cálculo diferencial e integral.

Tais aspectos que serão também discutidos em seções posteriores do presente artigo, uma vez que tal assunto se refere à polêmica epistemológica acerca das interpretações continuadas por Maclaurin em seu tratado sobre fluxões, publicado em dois volumes, também no século XVIII, dando continuidade aos estudos anteriormente stabelecidos por Newton.

Na mesma sequência de revisão bibliográfica identificamos, ainda, outro artigo, não menos importante, intitulado *Os tratados de George Salmon (1819-1904) no contexto da matemática britânica do século XIX: de uma abordagem sintética para uma abordagem analítica* (LIMA; GRIMBERG, 2019), cujo foco central refere-se ao desenvolvimento do cálculo na matemática britânica no referido período, com destaque para as abordagens sobre as ideias relativas ao cálculo diferencial e integral produzidas por Newton, Maclaurin e Taylor.

De um modo geral, interpretamos que os artigos revisados tratam de diversos aspectos epistemológicos que correlacionam princípios filosóficos, epistemologias e questões acadêmicas gerais a respeito do desenvolvimento do cálculo. Todavia, sentimos a necessidade aprofundar um pouco mais nosso enfoque no trabalho de Colin Maclaurin, tendo em vista a abundância de conexões conceituais que podem ser estabelecidas entre sua abordagem e uma abordagem a ser proposta futuramente em nosso trabalho docente em relação ao ensino do conceito de derivada. Assim sendo, nas seções seguintes faremos uma descrição analítica mais detalhada acerca da trajetória do trabalho de Maclaurin a respeito desse tema, por considerar sua relevância para alcançarmos nossos objetivos conceituais e didáticos na formação de professores de matemática.

**Síntese Biográfica de Colin Maclaurin**

Colin Maclaurin foi um matemático britânico que nasceu em Kilmodan (Escócia), em 1698 e faleceu em Edimburgo (Escócia), em 1746. Considerado um jovem muito estudioso, ingressou na universidade com apenas 11 anos, e aos 19 anos foi eleito professor de matemática no Marischal College. Dois anos depois se tornou membro da Royal Society de Londres, quando passou a se familiarizar com as ideias e os trabalhos de Isaac Newton, que posteriormente muito contribuíram para que Maclaurin avançasse nos trabalhos iniciados por *Newton* sobre *Cálculo infinitesimal, Geometria e Teoria da gravitação*.

Em seu primeiro trabalho, *Geometrica Organica; Sive Descriptio Linearum Curvarum Universalis* (Geometria orgânica, com a descrição das curvas lineares universais) de 1720, Maclaurin desenvolveu vários teoremas semelhantes a alguns dos *Principia* de *Newton*, introduziu o método de geração de secções cônicas (círculo, elipse, hipérbole e parábola) que leva seu nome e mostrou que certos tipos de curvas (de terceiro e quarto grau) podem ser descritas pela interseção de dois ângulos móveis. Esse trabalho foi considerado entre as mais importantes de suas obras de matemática, pois foi apontado por vários estudiosos do tema, como a base para uma fundamentação lógica do cálculo infinitesimal no *A Treatise of Fluxions* (Um Tratado das Fluxões), publicado em Edimburgo, em 1742. Esse foi considerado seu principal trabalho, no qual desenvolve as noções seminais concernentes ao conceito de derivada e suas propriedades básicas envolvendo inicialmente a soma, o produto entre fluxos, bem como sobre o estudo envolvendo integrais, idealizados pelo método inverso do fluxo.

Demonstrou que uma massa de fluido homogêneo em rotação adquire a figura de um *Elipsoide*, e estabeleceu uma teoria considerada adequada (válida) a respeito dos máximos e mínimos das curvas. Em 1740 compartilhou com os matemáticos suíços Leonhard Euler e Daniel Bernoulli, o prêmio oferecido pela Academia Francesa Ciências por um ensaio sobre marés.

Os principais livros publicados pelo autor foram os seguintes: *Geometrica Organica; Sive Descriptio Linearum Curvarum Universalis* (1720); *A treatise of fluxions in two books* (1742); *A Treatise of Algebra* (1748) e sua 2ª edição em 1756; *Exposition des Découvertes philosophiques de M. Newton* (1749).

**Aspectos gerais do livro de Colin Maclaurin sobre fluxões**

Na introdução, o autor apresenta no desenho estrutural do tratado, mencionando inicialmente sua base epistemológica fundada no método da exaustão, baseado no livro 12 dos Elementos de Euclides, o método de comparação e áreas de figuras planas circulares e elípticas, seguindo com um teorema geral para descrição de figuras originadas de secções cônicas e algumas proposições de Arquimedes sobre esfera, esferoides, quadratura da parábola, espiral de Arquimedes e de Pappus, além de outros métodos antigos relativos aos princípios da exaustão, bem como aspectos principais sobre os métodos dos indivisíveis e os infinitesimais.

Ficou bem explicitado que o autor recorre às informações sobre o desenvolvimento histórico de conceitos matemáticos considerados chaves para relacionar aspectos concernentes ao tema central do livro: as ideias de fluxões. Neste sentido, Maclaurin finaliza a introdução discorrendo sobre os elementos do método das fluxões, demonstrado a partir de diversas práticas matemáticas estabelecidas por geômetras antigos, posteriormente descritos e discutidos ao longo dos volumes 1 e 2 do referido tratado.

O volume 1, sob o título *Dos Fluxos de Magnitudes Geométricas*, está organizado em 14 capítulos. Nos oito primeiros, o autor aborda desde *as bases do método das fluxões proposto*, para tratar do referido método a ser abordado para figuras retilíneas planas e figuras curvilíneas planas, de modo a servir de balizador para um exercício de extensão conceitual que pudesse ampliar a explicitação do método para os fluxos de sólidos e de terceiros fluxos, considerando , para tal, os fluxos de quantidades que, segundo o autor, estariam em um progresso geométrico contínuo, cujo primeiro termo é invariável. Maclaurin segue discorrendo sobre os logaritmos e as fluxões de quantidades logarítmicas, e sobre as tangentes das linhas curvas, intencionando tratar dos fluxos de superfícies curvas.

A partir do nono capítulo, Maclaurin discorre sobre os maiores e menos ordenados dos pontos de flexão e reflexão, contrários de vários tipos e de outras afirmações sobre curvas que são definidas por uma equação comum ou por uma fluxional. Igualmente, segue tratando das assíntotas das linhas curvas e das áreas delimitadas por elas e pelas curvas, bem como dos sólidos de revolução gerados por essas áreas, e ainda sobre linhas em espiral e os limites das somas das progressões. No decorrer dos demais capítulos, o autor trata, ainda, da curvatura das linhas, sua variação e os diferentes tipos de cálculos feitos sobre as áreas dessas curvas e do círculo da curvatura, além de teoremas que retratem sobre centros de gravidade e seus movimentos, forças centrípetas e outros problemas que dependem da curvatura das linhas.

Nos três últimos capítulos, Maclaurin trata dos outros métodos pelos quais as teorias e o método das fluxões foi demonstrada, e de que modo pode ser estabelecida sua aplicação à resolução de problemas, ou onde a natureza das linhas de defesa da rapidez é determinada em quaisquer hipóteses de gravidade, e os problemas relativos às figuras isoperimétricas, com outros da mesma maneira são resolvidos por primeiras fluxões e as soluções verificadas por demonstrações sintéticas. Em seguida, mostra que a elipse pode ser considerada como uma secção de um cilindro. Posteriormente, aborda aspectos relativos à gravitação que resulta da gravitação em direção a suas partículas da figura da Terra e da variação da gravidade em relação a ela; do fluxo e refluxo do mar, e outras investigações desta natureza. Percebeu-se a partir dessa parte do volume 1 que o autor passou a discutir diretamente as relações entre teoria e prática que envolvessem conceitos e métodos relativos às fluxões, assunto que seria tratado de modo mais aplicado no segundo volume.

O volume 2, intitulado *Dos cálculos no método dos fluxões*, está organizado em cinco capítulos nos quais o autor trata dos fluxos de quantidades consideradas abstratamente, ou representadas por caracteres gerais em álgebra. Neste sentido, discorre sobre os modos de se materializar a notação de fluxões, bem como as regras do método mais direto e das regras fundamentais do método inverso das fluxões. Em seguida, trata da analogia entre arcos circulares e logaritmos, bem como da redução de fluentes a estes, ou a arquétipos hiperbólicos e elípticos, ou a outros fluentes de forma mais simples, quando não são atribuíveis em termos algébricos finitos. Na sequência, aborda sobre a área em que a ordenada e a base são expressas por fluentes, considerando a existência de cálculos fluentes dos fluxos de progressões ou fluxos de progressões de fluentes e outros ramos deste método. Assim, o autor finaliza o segundo volume com a apresentação de suas regras gerais para a resolução de problemas relativos ao tema descrito e discutido no tratado.

## Noções gerais sobre o método das Fluxões sob a influência de Isaac Newton

O texto de Maclaurin fundamenta-se nos primeiros estudos históricos sobre o desenvolvimento do cálculo infinitesimal e sua difusão nos séculos XVII e XVIII, considerando que as primeiras discussões sobre este assunto apareceram na Grécia Antiga, na formulação da ideia do infinito,[2] com o paradoxo de Zenão e o método da exaustão por Eudoxo de Cnidus (408–355 a.C.). Daí em diante teve seu desdobramento até a criação do cálculo diferencial e integral envolvendo situações problemas relacionadas às medidas de comprimentos, áreas e volumes de figuras curvilíneas.

Esse método foi aperfeiçoado por Arquimedes e, consequentemente, Cavalieri, discípulo de Galileu retomou esse estudo. O processo consistia em inscrever polígonos regulares em uma figura curvilínea, como um círculo, e ir dobrando o número de lados até

[2] Pela enciclopédia Britânica, este termo deriva do grego ἄπειρον (Apeiron) e significa ilimitado, indefinido, sem forma e sem limite. A simbologia $\infty$ foi atribuída pelo matemático Jonh Wallis em 1655 com aprofundamento sobre este tema e intensificada no estudo do desenvolvimento do cálculo através dos infinitesimais formulada por meio de estudos de curvas no século XVII, além de contribuir na cardinalidade de conjuntos nos séculos XVIII e XIX.

que a diferença entre a área da figura e a do polígono inscrito se tornasse menor do que qualquer quantidade fornecida. Interpreta-se, portanto, que tal método representava uma aproximação para encontrar a área do círculo e dos polígonos inscritos e circunscritos a ele. Ao aprofundar essa técnica era possível encontrar as áreas e volumes de sólidos geométricos. Relativamente ao estudo de áreas de figuras planas, essa técnica trouxe contribuições significativas ao aprofundamento de estudos sobre curvas que resultaram no entendimento e formulações de certas funções polinomiais e suas representações gráficas e retas tangentes, que se tornaram importantes à compreensão sobre derivadas e integrais.

Para Silva (2010) o marco inicial do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral aconteceu no período do Renascimento, que culminou com a queda da cidade de Constantinopla em 1453 – Capital do Império Bizantino; a invenção da imprensa – em 1500 por Gutenberg, e a conquista da América, em 1492. Esse período foi marcado pela influência da Europa Ocidental sobre as restantes regiões do globo, momento em que as Ciências Naturais demarcaram conexões como nos campos da Matemática e da Física, inserindo mudanças nos estudos científicos, que originaram novas formas de pensar sobre o universo – o heliocentrismo, bem como cálculos astronômicos estabelecidos pelas novas leis explicativas do movimento e da rotação da terra em torno do sol, como as contribuições de que ficaram conhecidas como *Leis de Kepler*.[3] Posteriormente, as leis do movimento originadas dos estudos de Galileu Galilei (1564–1642) sobre o movimento de queda livre foram outro marco significativo contribuindo para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Por fim, as formulações sobre este método também contribuíram para que Newton pudesse desenvolver estudos envolvendo as fluxões.

Foi como culminância desse movimento que os estudos realizados no século XVII contribuíram para o desenvolvimento do cálculo infinitesimal e para o avanço da ciência, inseridos na realidade social e cultural da época. Os dilemas, as propostas, os métodos de resoluções inicialmente que se tornaram sem resposta para os cientistas, filósofos e estudiosos do passado estavam sendo retomados, principalmente, no que concerne às soluções de problemas relacionados a quadratura do círculo e trissecção do ângulo, entre outros problemas relacionados às conexões entre matemática e astronomia.

Os trabalhos e as idealizações iniciais relacionadas ao cálculo diferencial e integral foram propostos por Isaac Newton (1642–1727), considerado o pioneiro em um estudo mais aprofundado sobre a construção lógica e aritmética do cálculo, por meio dos quais lançou as bases de sua mecânica, forneceu estudos acerca da gravidade, óptica e os princípios da teoria das fluxões, fundamentado em dois de seus trabalhos: O *De Analysis* e o *De Methodis*.

[3] As leis do movimento planetário de Kepler são conhecidas como: lei das órbitas elípticas, lei das áreas e lei dos períodos. Juntas estas explicam como funciona o movimento de qualquer corpo orbitando algum astro massivo, como planetas ou estrelas.

De acordo com Panza (2010, p.516), o *De Analysis* é considerado a primeira apresentação pública da teoria das fluxões, uma vez que se configurou como uma espécie de *instant book* (livro instantâneo) escrito para expor alguns de seus resultados referentes a problemas sobre curvas. Esse trabalho de Newton inclui vários exemplos de análises aristotélicas operacionalizadas por meio do estudo proposto por Viète sobre curvas. Segundo Panza (2010, p.516) "A divulgação deste trabalho foi significativa para a impressão de famílias de curvas algébricas e de certas curvas transcendentes por meio de equações da forma $y = ax^{\lambda} + bx^{\mu} + cx^{v}$, onde $\lambda$ , $\mu$ , $v$" são expoentes racionais, tendo o significado que os membros do lado direito são uma soma finita ou infinita. De acordo com este autor foi possível aplicar a essas curvas a seguinte regra da quadratura:

$$y = ax^{\lambda} \rightarrow \mathrm{A}\,(y) = \frac{\alpha}{\lambda + 1}\, x^{\lambda+1};\ \mathrm{A}\,(\gamma + z) = \mathrm{A}\,(\gamma) + \mathrm{A}\,(z)$$

em que $\mathrm{A}\,(w)$ denota a área delimitada pela curva da ordenada ortogonal cartesiana w, que, em termos modernos corresponde a $\int w\,(t)\,dt$, supondo que $w\,(0) = 0$. Esta é uma pequena parte da enorme quantidade de resultados que Newton obteve entre 1663 e 1666. Dessa maneira, foi praticamente na redação do Tratado de Outubro de 1666 que Newton realizou um estudo mais relevante sobre curvas envolvendo movimento.

Para Calazans (2014, p.57) Newton iniciara uma série de redações com o propósito de desenvolver e explicitar a "generalidade da solução geométrica para problemas cinemáticos de composição de movimentos, sustentando que as soluções algébricas são, na verdade, casos particulares". O referido tratado, posteriormente, resultou na produção do *De Methodis*, no qual de um total de oito proposições presentes no estudo, as seis primeiras são relacionadas a composição do movimento. Sendo assim, de um modo geral, seus problemas são reformulações ou extensões dos *problemas das tangentes e das áreas*, os quais foram apreciados por importantes matemáticos da época.

Para Panza (2010) os esforços de Newton sobre a construção do *De Methodis* consistiam em expor uma teoria que envolvia movimento e velocidade, para solucionar os problemas geométricos; neste trabalho, então, introduziu a concepção de cinemática, em que adverte sobre a redução de vários problemas matemáticos a somente dois problemas gerais:

> *"Mas, antes de tudo, devo observar que todas as dificuldades desse tipo podem ser reduzidas aos dois problemas a seguir, que me sejam concedidos propor a respeito do espaço percorrido por qualquer movimento local acelerado ou retardado como quer que seja:*
> *Dada a distância do espaço continuamente (isto é, em qualquer tempo), encontrar a velocidade do movimento em qualquer tempo indicado.*

> *Dada a velocidade do movimento continuamente, encontrar o comprimento do espaço descrito em qualquer tempo indicado."* (PANZA, 2010, p.519).

A esse respeito Panza reitera que na visão newtoniana estes dois problemas consistem em definir a velocidade para um movimento contínuo que envolve o espaço e o tempo. Com isso, percebe-se que os esforços impostos por ele quando o movimento é descrito, pressupõe que as figuras geométricas em movimento recebam acréscimos ou decréscimos contínuos quando são descritos. A princípio, Newton usa o corpo/figura/partícula em movimento ao percorrer uma linha ou reta; e de forma semelhante, as linhas descrevem planos. Ainda nessa mesma interpretação, Calazans (2008, p. 32) esclarece que quando o "movimento é acelerado ou retardado, as linhas e os planos recebem acréscimos ou decréscimos de grandezas".

Compreendemos, portanto, que Newton utiliza o acréscimo ou decréscimo de grandezas para incorporar conceitos importantes extraídos na sua interpretação empírica como o tempo e a velocidade, pois na cinemática Newtoniana quando ocorrem aumento ou diminuição de grandezas em determinado tempo, representados sobre uma linha ou reta, existe uma velocidade presente no percurso. Em sua interpretação, Calazans (2008) assevera que Newton enfatiza que o tempo é uma afecção comum descrita pelas grandezas alcançadas durante o percurso, o que pode surgir velocidades diferentes.

Compreendemos que na interpretação de Calazans (2008, p.34) há um entendimento subjacente sobre o tratamento da velocidade, no qual se destaca "o caráter indireto do procedimento para mensurá-la mediante a comparação entre as quantidades constitutivas do movimento". No *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum*[4] (1671), não existe uma definição própria do conceito de velocidade. Entende-se que ele adquiriu esse conceito de outros estudiosos e cientistas renomados. Tem-se uma visão interpretativa de que a velocidade seja uma grandeza *intensiva*, no sentido que ela só pode ser mensurada indiretamente por outras grandezas. A velocidade mencionada neste momento não está ainda conectada diretamente ao conceito de movimento uniforme.

Depreende-se daí que Newton baseou-se no estudo de Galileu sobre lançamento de projéteis para consolidar os princípios que geraram o entendimento sobre velocidade, ao descrever a trajetória de uma partícula sendo susceptíveis a aumentar ou diminuir – algo que esteja relacionado a grandezas extensivas como linhas, planos e sólidos. Explicitou, ainda, que o espaço percorrido pelo movimento dos corpos sobre a reta tem uma influência de trabalhos oriundos da *Gravitatione et aequipondio fluidorum*[5] (1664–1668), o qual

---

[4] Tratado sobre o método das séries e fluxões, escrito por Isaac newton em 1671 e publicado em 1736 sob o título: the method of fluxions infinite series. É comum encontrarmos referências a esse tratado sob a expressão *De Methodis*.

[5] Gravitação e equilíbrio de fluidos.

reconhece a velocidade como uma grandeza *intensiva* e oferece um entendimento sobre os principais elementos inseridos neste contexto: quantidade e espaço. Sendo assim, para Newton, de acordo com esse trabalho envolvendo gravidade quando se opera o conceito de força é possível que o termo quantidade esteja relacionado a algo extensivo.

A consolidação da proposta presente no *De Methodis* provavelmente sofreu forte influência relacionada ao conceito de velocidade a partir do momento em que Newton se inspirou no trabalho de Barrow sobre *Lectiones geometricae* (1670)[6]. Assim, a proposta de Galileu a respeito do conceito de velocidade teria levado Newton a pensar e a concordar com Barrow ao apresentar velocidade como algo que seja mensurável indiretamente pela relação entre espaço e tempo. Para Calazans (2008, p. 34) "quantidade de velocidade não pode ser encontrada a partir somente da quantidade de espaço percorrido, nem somente a partir do tempo apreendido, mas a partir da apresentação de ambos juntamente reconhecidos". Para esta autora, Barrow substitui o termo "quantidade" de velocidade para "grau" de velocidade, no sentido dado por Galileu. O método de fluxões de Newton está profundamente entrelaçado com métodos envolvendo séries infinitas e de potências.

Desse modo, Guicciardini (2009, p.341) propõe um comentário que o *De Methodis* surge em um momento de criatividade matemática quase obscurecido pelos anos maravilhosos. Neste tratado, encontram-se as mais avançadas técnicas newtonianas de expansão em série, "uma exposição dos conceitos básicos e regras do método fluxional, a aplicação do método direto de fluxão ao cálculo de tangentes e curvaturas e os catálogos sistemáticos de curvas, que trazem a quadratura das curvas à perfeição". De fato, nas linhas de abertura do *De Methodis*, ele incorporou e expandiu o *De Analysi* apresentando métodos de série por meio de divisão extensa, extração de raízes e resoluções abrangidas por meio do estudo de equações.

Na obra *De Methodis* de 1671, Newton estrutura esta concepção sobre três conceitos centrais. *Quantidade fluente, fluxão e momento*. Para Calazans (2008, p.36) "A *quantidade fluente* nada mais é do que a própria quantidade espacial descrita pelo movimento" e são representadas pelas linhas, planos e sólidos. Os símbolos utilizados nas equações para tais quantidades são as letras finais do alfabeto: $v$, $x$, $y$, e $z$. Neste caso, as quantidades fluentes são descritas pelo movimento contendo alguma velocidade. As velocidades pelo qual toda fluente é aumentada pelo seu movimento gerador é chamada de fluxão e são representas letras pontuadas $\dot{v}$ , $\dot{x}$ , $\dot{y}$ e $\dot{z}$. Podem também ser empregadas neste método o uso de constante, que são representadas pelas letras iniciais do alfabeto a, b, c e d. Nesta última concepção, *os momentos* das quantidades fluentes segundo Guicciardini (2009, p.207) são "as adições infinitamente pequenas pelas quais essas quantidades aumentam durante cada intervalo de tempo infinitamente pequeno", conforme mostra a figura 1 a seguir.

[6] Lições geométricas.


**Figura 1:** Representação do movimento descrito
**Fonte:** Elaboração dos autores com base no original de Newton (1736).

Sendo assim, considera-se um ponto que flui com velocidade variável ao longo de uma reta. Dessa forma, entende-se que a distância percorrida num determinado instante é a fluente, a velocidade adquirida no percurso é a fluxão. Para Guicciardini (2009) as partes indefinidamente ou infinitamente pequenas por meio das quais a fluente aumenta após os intervalos de tempo são os *momentos* da quantidade fluente. Newton observou ainda que os *momentos* são "Como a velocidade do fluxo" (ou seja, as fluxões). De acordo com Calazans (2008, p.37) "se duas quantidades fluentes são representadas por x e y, os seus momentos entrarão nas equações, respectivamente, com os seguintes símbolos: $\dot{x}\,o$ e $\dot{y}\,o$. Dessa forma, existe uma multiplicação entre a fluxão com o símbolo o (letra grega ômicron). A principal função desta letra grega é marcar a presença do tempo, o qual é representado pelo infinitamente pequeno gerado pelo percurso da fluente sobre a reta.

Dessa forma, os *momentos* são representados pela fluxão da quantidade fluente e está relacionada a multiplicação pelo marcador tempo. Sendo assim, para Calazans (2014, p.78) "se pensarmos a fluxão como análoga à velocidade, ao multiplicá-la pelo tempo, obteríamos o espaço percorrido". Com isso, o momento pode ser acrescentado à quantidade fluente (grandeza espacial) tornando-se um aumento a esta quantidade quando sofre naquela parcela indefinidamente pequena do tempo e serão representados por $x + \dot{x}\,o$ e $y + \dot{y}\,o$. Nisto, percebe-se uma semelhança com a ideia de limite ou do infinitamente pequeno, que nesta época estava relacionada a noção de infinitésimos.

Em síntese, no *De Methodis*, Newton utilizou o método das séries e fluxões a vários problemas. Os principais consistiam em encontrar máximos e mínimos de grandezas variadas, como determinar tangentes e curvas planas e como calcular áreas curvilíneas e comprimento de arcos. Devido às quantidades geradas por um fluxo contínuo, todos esses problemas seriam deduzidos a seus dois problemas conforme mencionamos anteriormente. O primeiro, que consiste em encontrar a velocidade do movimento em qualquer momento proposto propõe o método direto da fluxão e são utilizados para encontrar os problemas relacionados a tangentes, máximos, mínimos e curvaturas. O segundo, ao ser dado a velocidade do movimento, encontrar o comprimento do espaço descrito a qualquer momento proposto é conhecido como método inverso da fluxão e são empregadas para problemas relacionados a localização de áreas curvilíneas e comprimentos de arco.

Sendo assim, o *De Methodis* é apreciado no decorrer da história por publicação semelhante. Porém, nem todos tiverem acesso ao manuscrito completo para a impressão. A transcrição feita por Willian Jones em 1710 trouxe uma contribuição para a publicação do *De Methodis*, tendo em suas mãos a cópia de Colins, traz uma edição a respeito do *Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones, ac Differentias: cum Enumeratione Linearum Tertii Ordinis* (Análise por séries de quantidades, fluxos e diferenças: com a enumeração de linhas de terceira ordem). Whiteside mencionou uma transcrição secundária, agora perdida, de Cópia de Jones feita por James Wilson por volta de 1720. Samuel Horsley usou ambas as transcrições em sua edição da Ópera de Newton.[7] Dessa forma, coube a John Colson publicar em 1736 um Tratado das Fluxões e Séries Infinitas. Essa obra continha o desenvolvimento do estudo realizado por Newton sobre o *De Methodis* de 1671 e, consequentemente, e de sua atualização realizado por ele no ano de 1690 a partir do estudo sobre a *De quadratura.*[8]

Esse trabalho publicado em 1736 tem as mesmas características da primeira versão, na qual o Método da Fluxão foi aplicado com sucesso através de princípios sobre os quais o método foi desenvolvido. Newton (1736, p.11) menciona que o principal princípio, sobre o qual este método foi construído obtido dos mecanismos racionais, cuja particularidade descreve da quantidade matemática particularmente extensa, que pode ser concebida como gerada pelo movimento local contínuo, e que todas as quantidades sejam quais forem, pelo menos por analogia e acomodação, podem ser concebidas como geradas de maneira semelhante. Para ele, deve haver "velocidades comparativas de aumento e diminuição, durante tais gerações, cujas relações são fixas e determináveis, e podem, portanto (problematicamente) ser propostas para serem encontradas".

A ideia de fluxão estava ancorada à solução de problemas relacionados aos estudos de curvas, quadratura e tangente por meio do estudo do movimento. Na verdade, deve-se reconhecer que os aprimoramentos sobre este método foram importantes para o estudo de derivadas e integrais seguindo uma noção intuitiva do conceito de limite (infinitésimos). Assim, as objeções referentes ao método usual proposto por Newton consistem em encontrar o crescimento, momento ou fluxo de qualquer potência indefinida $x^n$ da quantidade variável $x$, dando essa investigação a não deixar espaço para quaisquer exceções justas a este método.

Após a morte de Newton, quem ficou responsável por boa parte das produções científicas realizados por ele foi John Conduitt, que era esposo da sobrinha de Newton. E outra parte também foram inseridas na Universidade de Cambridge. Sendo assim, as divulgações científicas referentes aos trabalhos científicos foram divulgadas e apreciadas

---

[7] Newton, Opera (1779–85), 1, p. 390. veja MP, 3, p. 32.

[8] A versão composta no início da década de 1690 foi revisada para publicação em 1703 e apareceu sob o título de Tractatus de Quadratura Curvarum in Newton, Opticks (1704).

pela comunidade acadêmica e estudiosos daquela época. Antes de Conduitt falecer, ele desejou ajudar Maclaurin em reconhecimento e gratidão ao seu grande patrono que empreendeu exitosamente no estudo sobre a História do Progresso que a Filosofia havia realizado antes de Newton. Dessa forma, Conduitt não teve tempo de apreciar esse estudo sobre as magníficas invenções de Newton devido a sua morte, o que boa parte dessas obras foram entregues a Colin Maclaurin, pois durante a sua vida acadêmica teve uma afinidade com os trabalhos de Newton.

## A ideia de derivada no estudo de fluxões por Maclaurin

Em sua publicação intitulada *A Complete System of Fluxions; with their Application to the most Considerable Problems in Geometry and Natural Philosophy* (Sistema Completo de fluxões; com suas aplicações aos problemas mais consideráveis em Geometria e Filosofia Natural), considerada importante e organizada em dois volumes compostos por 763 páginas, Colin Maclaurin apresentou sua defesa do método newtoniano, em resposta às críticas do bispo George Berkeley, da Inglaterra, de que o cálculo de Newton se baseava em um raciocínio defeituoso. Nesses volumes Maclaurin desenvolveu estudos e aplicações voltados a ideia de derivada, bem como suas propriedades e funções com métodos de fluxões a partir de uma base axiomática, na qual aparece uma famosa fórmula para a qual foi atribuído o seu nome ou sequência que ficou conhecida como Série de Maclaurin.

Assim, Maclaurin tomou o pensamento de Barrow,[9] o qual definia uma grandeza a partir de um determinado espaço em que poderia ser descrito em um determinado período de tempo. Para ele, pode-se usar o termo grandeza atribuindo a um corpo, figura ou partícula em movimento. Dessa forma, Maclaurin (1742) introduziu na geometria a ideia de velocidade *instantânea*, que está relacionada ao trabalho de Isaac Newton a respeito do estudo de fluxão e fluente. Considerava fluxão como a taxa de geração e fluente como a quantidade gerada. Desse modo, o fluxo busca encontrar um método geral de derivar a simpatia de sua gênese, os quais são concebidas as quantidades a serem aumentadas e diminuídas, ou totalmente geradas pelo movimento. Observa-se que a ideia principal de fluxo está relacionada a velocidade nesse processo contínuo gerado pela quantidade o denominou de *derivada*.

Sendo assim, seguindo o que Maclaurin adotou em suas obras sobre o tratado das fluxões, objetiva-se que o estudo de cálculo proposto por Newton está mais relacionado a ideia de quadratura da curva do que ao estudo sobre infinitesimais. Dessa maneira, Rezende (2003, p. 202) adverte que “Newton assume a noção de velocidade como elemento fundamental do seu cálculo fluxional: uma quantidade variável se constitui, portanto,

[9] Issac Barrow foi um filósofo e matemático inglês. Professor de Isaac Newton e considerado seu incentivador no desenvolvimento de suas ideias sobre o cálculo.

através do movimento contínuo de pontos, linhas e planos, e não como uma coleção de elementos infinitesimais". Encontramos em Boyer (1974) um destaque interpretativo a esse respeito, de que no *De quadratura* Newton teria removido todos os traços e vestígios do "infinitamente pequeno". Outros estudiosos também reiteram que as quantidades matemáticas não eram consideradas como constituídas de partes muito pequenas e de momentos, mas descritas pelo movimento contínuo.

Em geral, todas as quantidades do mesmo tipo (quando consideramos apenas sua grandeza, e abstratas de sua posição, figura e outras importâncias) "podem ser representadas por linhas retas, que devem estar sempre na proporção de cada uma dessas quantidades". Dessa forma, em síntese, existem dois princípios gerais desse método. O primeiro é que, quando as quantidades são geradas são sempre iguais a cada uma, os movimentos geradores devem ser sempre iguais. O segundo contrário do primeiro, quando os movimentos geradores são sempre iguais cada um, as quantidades que são geradas no mesmo tempo devem ser sempre iguais entre si. O primeiro é o fundamento do método direto de fluxões; o segundo, o inverso do método (MACLAURIN, 1742).

Devido as críticas realizadas sobre a teoria das fluxões proposta por George Berkeley na Obra *O Analista*, de 1734, a respeito deste tema no que concerne ao termo *momento* e a *fluxão da fluxão,* bem como aos erros dos cálculos envolvendo tais estudos, coube a Maclaurin propor uma simples modificação deste tema de acordo com o comentário apresentado a seguir:

> "*Uma carta publicada no ano de 1734, sob o título de O Analista, deu início as primeiras ocasiões sobre o Tratado; e várias razões cooperaram para induzir-me a escrever tão extensamente sobre este assunto. O autor daquela peça representou o Método das Fluxões como fundado em raciocínios falsos e cheio de mistérios. Suas objeções podem ter sido ocasionadas, em grande medida, pela maneira concisa com que os elementos deste método têm sido geralmente descritos; e o fato de terem sido tão incompreendidos por uma pessoa com suas habilidades, parecia-me uma prova suficiente de que um relato mais completo dos fundamentos sobre eles era necessário.*" (MACLAURIN, 1742, p.6, Tradução Nossa).

Sendo assim, ao debruçar-se sobre um estudo envolvendo este tratado publicado por Newton em 1671, suas atualizações realizadas em 1690 e demais divulgações restritas ou da própria publicação realizada em 1736 levaram Maclaurin a corrigir algumas regras que estavam defeituosas e incorretas e, com o menor erro, pelas primeiras fluxões. Outros problemas foram resolvidos por aproximações, quando uma solução precisa pudesse ser obtida com a mesma ou maior facilidade. Seguindo estas orientações e observações sobre este método de aplicação, o levaram a compor gradualmente um tratado de uma extensão bem maior do que pretendia, ou teria feito, assim que tivesse ciente disso quando iniciou tal revisão, conciliando com trabalhos acadêmicos desenvolvidos quando era professor da Universidade de Edimburgo.

A partir dos estudos que fundamentaram o método da fluxão realizados por Newton, coube a Maclaurin propor um estudo mais detalhando do trabalho de Newton sobre *The Method Fluxions and infinite series* (O Tratado das Fluxões e séries infinitas) como resposta as críticas de Berkeley entre outros que noticiaram erros e objeções ao trabalho sobre o método das fluxões. Dessa maneira, Maclaurin sugeriu aderir a ideia de movimento uniforme seguindo os métodos propostos por Newton quando formalizou que o *momento* fosse proporcional à fluxão. Sendo assim, a ideia de fluxo é apresentada em seu tratado das fluxões como um entendimento de movimento no campo geométrico.

Desse modo, quando se realiza movimento e há intensidade de grandeza no deslocamento desses objetos remete-se primordialmente uma relação intrínseca com o deslocamento de objetos (espaço percorrido) e o tempo. Segundo Maclaurin (1742) "os espaços e o tempo são descritos e consistem sempre em partes. Com isso, o espaço pode ser concebido para percorrer assim como o tempo". O tempo é concebido para fluir em um percurso uniforme, que serve para medir todas as mudanças dos objetos. Então, essa relação entre espaço e tempo, que para esse autor, acontece quando a velocidade é a mesma em qualquer período do tempo durante o percurso.

Dessa forma, Maclaurin baseia-se neste método seguindo duas regras gerais conforme mencionada por Newton: O método direto, quando as quantidades que são geradas são sempre iguais a cada uma, os movimentos geradores devem ser sempre iguais. E o outro é o método inverso, quando os movimentos geradores são sempre iguais cada um, as quantidades que são geradas no mesmo tempo devem ser sempre iguais entre si. Esse método é tão bem fundamentado, que suas regras e operações podem ser entregues de maneira consistente em quaisquer princípios gerais que não sejam incompatíveis às noções mais evidentes. Neste tratado, manter expressões que possam parecer igualmente consistentes com todos os esquemas da metafísica tem sido frequentemente considerado de uma maneira concordante com os princípios daqueles ao supor que as quantidades consistam em elementos indivisíveis ou infinitamente pequenos.

Desse modo, dois princípios são evidentes na obra publicada em 1742 sobre *Treatise of Fluxions* (Tratado das Fluxões). O primeiro ocorre quando a quantidade gerada é considera lenta é chamada de *Fluente.* Isso ocorre porque as quantidades a serem aumentadas e diminuídas, ou totalmente geradas pelo movimento, ou por um fluxo contínuo análogo a ele. E o segundo, que é a velocidade com que uma quantidade flui, em qualquer período do tempo em que deve ser gerada, é chamada de *Fluxão*, que é, portanto, sempre medida pelo acréscimo ou decréscimo ao ser gerado em um dado momento por esse movimento, se este for continuado uniformemente a partir desse período, sem qualquer aceleração ou retardamento; ou pode ser medido pela quantidade que é gerada em um determinado tempo por um movimento uniforme que é igual ao movimento gerador naquele período.

Sendo assim, Maclaurin conclui que o estudo de cálculo proposto por Newton está mais relacionado a ideia de fluxão abordada sobre o estudo de quadratura da curva e explorados nos estudos de séries infinitas e de potências do que mesmo sobre os infinitesimais. Desse modo, a obra de Maclaurin (1742) é de certa forma mais ampliada que o trabalho desenvolvido por Newton (1736) porque menciona este método das fluxões de forma mais sistematizada ao fazer uso do estudo algébrico com variáveis destacando suas propriedades, métodos, técnicas e aplicações que são viáveis para o estudo do cálculo diferencial e integral conforme abordam os livros de ensino superior.

Ao detalhar esse método direto, Maclaurin (1742), seguindo as orientações e os trabalhos realizados por Newton, representou as quantidades variáveis ou fluentes, pelas letras finais do alfabeto, como x, y, z; suas primeiras fluxões pelas mesmas letras pontuadas uma vez, através de $\dot{x}$ , $\dot{y}$ , $\dot{z}$ ; suas segundas fluxões pelas mesmas letras pontuadas duas vezes, como por $\ddot{x}$ , $\ddot{y}$ , $\ddot{z}$ ; a terceira fluxões pelas letras pontuadas três vezes, como por $\dddot{x}$ , $\dddot{y}$ , $\dddot{z}$ e assim por diante; em que o número de pontos serve para mostrar a ordem da fluxão que é representada em relação a primeira fluente; e a diferença desses números mostra em que quaisquer ordem dele é a fluxão daqueles que o precedem, como $\dddot{x}$ , $\dddot{y}$ , $\dddot{z}$ é a primeira fluxão de $\ddot{y}$, mas a segunda fluxão de $\dot{y}$. Para esse autor, sabe-se que:

> “*O Sr. Leibniz representou as diferenças infinitamente pequenas de $x$, $y$, $z$, por $dx$, $dy$, $dz$; suas segundas diferenças por $ddx$, $ddy$, $ddz$; e suas diferenças infinitesimais de qualquer ordem $n$, por $d^n x$, $d^n y$, $d^n z$. O símbolo $\dot{x}$, ou $dx$, expressa a fluxão de $x$ geralmente, sem determinar se deve ser considerado positivo ou negativo, isto é, se $x$ aumenta ou diminui em relação aos outros fluentes. Quantidades invariáveis são representadas pelas primeiras letras do alfabeto, como $a$, $b$, $c$, etc. Estas não têm fluxões; e da mesma maneira, quando qualquer fluxão é suposta constante, sua fluxão desaparece, Sir Isaac Newton compreendeu a maioria das regras do método direto em uma proposição geral; mas é mais comum representá-los separadamente e pode ser útil passar gradualmente dos casos simples para os mais complexos.*” (MACLAURIN, 1742, pp. 591–592, tradução nossa).

Assim, as fluxões são responsáveis pelos processos de derivação, os quais estão relacionadas a disciplina de cálculo diferencial e integral e não aparecem nos livros de cálculo no ensino superior. Dessa maneira, os estudos oriundos do processo de derivação abordados por meio deste método em seus processos geradores de quantidades buscarão configurar uma representação do termo geral de derivada, bem como suas propriedades, métodos, regras e demonstrações, os quais caracterizarão um novo método de análise conceitual envolvendo esta temática.

**Representação de um termo geral de uma derivada por meio do estudo de fluxo**

A nova concepção do estudo de derivada oriundo da fluxão denota outro viés de análise para o entendimento desse conteúdo com ressignificações relevantes em que os livros de cálculo não apresentam esse conhecimento. Essa estratégia é de suma importância para a percepção do estudo de derivada de forma a complementar o que os livros de cálculo abordam a fim de que possa auxiliar os docentes no seu processo de ensino e na aprendizagem da matemática dos discentes do ensino superior.

Dessa maneira, a ideia de fluxão que caracteriza uma noção seminal de derivada, foi analisada sem se levar em consideração o modo de definir derivada com base no uso direto do conceito de limite de uma função conforme abordam a maioria dos livros de cálculo. O modo como esse método foi realizado inicialmente, pressupõe um movimento de quantidades geradas com o deslocamento de um corpo/figuras/partículas realizadas por meio do movimento uniforme no decorrer do tempo. Em conclusão, Maclaurin (1742, p.59) estabeleceu quatro axiomas que foram fundamentais para a interpretação e validação desse método:

> “Axioma I
> *O espaço descrito por um movimento acelerado é maior do que o espaço que teria sido descrito no mesmo tempo, pois o movimento não havia sido acelerado, mas continuava uniforme desde o início do tempo.*
>
> Axioma II
> *O espaço descrito por um movimento enquanto ele é acelerado, é menor do que o espaço que é descrito em um tempo igual pelo movimento que é adquirido por aquela aceleração continuada uniformemente.*
>
> Axioma III
> *O espaço descrito por um movimento retardado é menor do que o espaço que teria sido descrito no mesmo tempo, se o movimento não tivesse sido retardado, mas continuasse uniforme desde o início do tempo.*
>
> *Axioma IV*
> *O espaço descrito por um movimento enquanto ele é retardado é maior do que o espaço que é descrito em um tempo igual pelo movimento que permanece após esse retardamento, continuamente uniforme.”* (Ibidem, p.59) (Tradução Nossa).

Assim sendo, os axiomas foram bastante elucidativos de modo a favorecer para que Maclaurin pudesse propor os teoremas, lemas e proposições com vistas a proporcionar uma compreensão mais adequada dos estudos de fluxos e fluentes quando conectados ao estudo de derivada e seu processo de antiderivação por meio da velocidade de uma partícula/objeto/figura na reta perpassando assim uma representação do plano das figuras e dos sólidos geométricos.

Diante do exposto depreende-se que as regras para os cálculos, por meio deste método, a partir de princípios gerais, podem ser aplicáveis às quantidades algébricas. Sendo assim, quaisquer quantidades que são produzidas umas das outras por uma operação algébrica, cuja relação é expressa por qualquer forma algébrica sendo presumível para aumentar ou diminuir em conjunto, algumas irão aumentar ou diminuir por diferenças maiores, ou em um taxa maior, outros por diferenças menores, ou menor taxa; e enquanto alguns são supostamente maiores ou menores em uma taxa constante por diferenças sucessivas iguais, outros aumentam ou diminuem por diferenças que estão sempre variando (MACLAURIN, 1748, p.578, Tradução nossa).

Dessa forma, de acordo com Maclaurin (1742) pelas fluxões das quantidades deve-se, portanto, compreender que *quaisquer medidas de suas taxas repetitivas de aumento ou diminuição, enquanto variam (ou fluem) conjuntamente*. Não pode haver dificuldade em determinar as medidas quando as quantidades aumentam ou diminuem por diferenças sucessivas quando estão sempre na mesma proporção invariável entre si. Assim sendo, com esse propósito, tem-se:

> *“Enquanto A ao aumentar torna-se igual a* $A + a$*, ou ao diminuir, torna-se igual a* $A - a$*,* $2A$ *torna-se igual a* $2A + 2a$*, ou a* $2A - 2a$*; e como* $2A$ *aumenta ou diminui a um ritmo maior do que A na proporção de* $2a$ *para* $a$*; Se a fluxão de A pode ser supostamente igual a, a fluxão de* $2A$ *deve ser igual a* $2a$ *... em qualquer proporção atribuível, uma quantidade pode ser sempre definida que aumentará ou diminuirá em uma razão maior ou menor do que* $A$ *em qualquer proporção, ou que deverá ter sua fluxão maior ou menor que a fluxão de* $A$ *em qualquer razão. Nesse caso, a razão da fluxão e que as diferenças na mesma quantidade aumentam ou diminuem.”* (MACLAURIN, 1742, p.579, tradução nossa).

O problema da razão em relação a fluxão concentra-se como as diferenças na mesma quantidade aumentam ou diminuem. Dessa maneira, a fim de decifrar essa ideia, Mol (2013, p.106) propõe que o problema central consistia no seguinte: “*Dada a relação das quantidades fluentes, encontrar a relação entre suas fluxões, e reciprocamente”*. O método de Newton aplicado a $y = x^n$ é descrito a seguir.

Se $o$ é um "intervalo de tempo infinitamente pequeno", $\dot{x}\,o$, $\dot{y}\,o$ são os crescimentos infinitesimais pequenos de $x$ e de $y$. Substituindo $y + \dot{y}\,o$ e $x + \dot{x}\,o$ na relação (entre as quantidades fluentes) $y = x^n$ obtém-se:

$$y + \dot{y}\,o = (x + \dot{x}\,o)^n$$

$$y + \dot{y}\,o = x^n + nx^{n-1}\,\dot{x}\,o + \frac{n\,(n-1)}{2}\,x^{n-2}(\dot{x}\,o)^2 + \cdots$$

Substituindo-se $y = x^n$ e cancelando, tem-se:

$$x^n + \dot{y}\,o = x^n + nx^{n-1}\,\dot{x}\,o + \frac{n\,(n-1)}{2}\,x^{n-2}\,(\dot{x}\,o)^2 + \cdots$$

$$\dot{y}\,o = nx^{n-1}\,\dot{x}\,o + n\,\frac{(n-1)}{2}\,x^{n-2}\,(\dot{x}\,o)^2$$

Agora, dividindo por $o$, a série, obtém-se:

$$nx^{n-1}\,\dot{x} + \frac{n\,(n-1)}{2}\,x^{n-2}\,\dot{x}\,o + \cdots$$

Sendo assim, conclui-se:

$$\dot{y} = nx^{n-1}\,\dot{x} + \frac{n\,(n-1)}{2}\,x^{n-2}\,\dot{x}\,o + \cdots$$

Newton elimina todos os termos que contém $o$ como fator para obter:

$$\dot{y} = nx^{n-1}\,\dot{x}$$

Para Maclaurin (1742), essa expressão refere-se a uma proposição que afirma: *A fluxão da raiz x sendo considerado igual a $\dot{x}$, a fluxão da potência $x^n$ será igual a $nx^{n-1}\,\dot{x}$.* Sendo assim, não calcula a fluxão de uma quantidade, mas sim a razão entre duas fluxões. Ao ilustrar seu método, Newton apresentou um caso algébrico, após ter discutido alguns procedimentos de limite geométrico semelhantes aos que ele empregou em "Geometria Curvilinea" e no Principia. Newton (surpreendentemente moderno) apresenta o caso algébrico da seguinte forma seguinte:

Seja a quantidade x fluindo uniformemente e a fluxão da quantidade $x^n$ precisa ser encontrada [observe que na notação de Newton n pode ser fracionada]. No momento em que a quantidade $x$ chega em seu fluxo a ser $x + o$, a quantidade $x^n$, a quantidade $x^n$ passará a ser $(x + o)^n$, ou seja, [quando expandido] pelo método da série infinita:

$x^n\;nox^{n-1} + \frac{(n^2 - n)}{2}\,o^2\,x^{n-2} + \cdots$. E assim os aumentos $o$ e

$nox^{n-1} + \frac{(n^2 - n)}{2}\,o^2\,x^{n-2} + \cdots$ estão um para o outro assim como 1 está para

$$nox^{n-1} + \frac{(n^2 - n)}{2}\,o^2\,x^{n-2} + \cdots.$$

Agora, deixe esses aumentos desaparecerem e sua última proporção será 1 para $nx^{n-1}$; consequentemente, a fluxão da quantidade x está para a fluxão da quantidade $x^n$ assim como 1 está para $nx^{n-1}$ (GUICCIARDINI, 2009, p.207).

Com esse resultado, para Guicciardini (2009) observa-se que o aumento $o$ é finito e que o cálculo visa determinar o limite da razão $o \,/\, ((x+o)^n) - x^n$ à medida que $o$ tende a zero. O limite é aquele atingido precisamente quando as duas quantidades desaparecem simultaneamente; não é um limite calculado quando as duas quantidades diferem de zero por uma quantidade infinitesimal. Segundo Mol (2013, p.107) o processo descrito anteriormente equivale, de fato, ao cálculo da derivada conforme mencionam os livros de cálculo:

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A ideia proposta por Newton em seus cálculos conforme mencionado anteriormente, não possuía uma definição formal de limite, muito embora tenha revelado em seus trabalhos possuir uma noção de limite, que só foi notório no século XIX.

Portanto, os princípios e métodos propostos por Maclaurin em suas obras buscam subsidiar o entendimento sobre a ideia de derivada, que este autor o define como sendo a velocidade com que uma quantidade flui em uma partícula com movimento uniforme. A fluxão definida por essa velocidade consiste em um entendimento do que seja a derivada, que em outras palavras, é o momento em que a curva se torna reta para a função em um determinado ponto. As técnicas empregadas sobre esta proposta da fluxão torna possível a compreensão da derivada enésima, suas propriedades, fórmulas e resoluções.

Estudiosos sobre o assunto também enfatizam na premissa de que embora o livro tenha recebido muita atenção, não há informações históricas registradas que indiquem se a obra exerceu muita ou pouca influência no ensino de matemática. Esse é um dos fatos que nos suscitou alguns questionamentos: como o livro foi recebido no contexto europeu, na segunda metade do século XVIII? qual sua influência no ensino de matemática, no contexto da Inglaterra, Escócia, ou mesmo nos principais centros intelectuais e universidades da Europa, uma vez que também foi traduzido para a língua francesa, que era muito disseminada entre os leitores da época? Por qual motivo foi trazido para o Brasil, no acervo bibliográfico dos profissionais que atuaram na demarcação das fronteiras territoriais da Espanha e Portugal na Amazônia, na segunda metade do século XVIII?

As questões mencionadas no parágrafo anterior são algumas das indagações que nos levaram a estabelecer um plano mais amplo e prolongado de pesquisa sobre esse livro e seu impacto no desenvolvimento dos modos como o conceito de derivada foi abordado em publicações posteriores que foram utilizadas no ensino de cálculo diferencial e integral tanto na Europa como em outros continentes, a exemplo do Brasil.

**Considerações Finais**

Após uma leitura e reflexão geral acerca do tema, ao longo das seções deste artigo, foi possível reconhecermos que o trabalho de Maclaurin, com base nas formulações newtonianas, forneceu uma base rigorosa para o método de fluxões, fundamentado no embrião do conceito de limite, cuja matriz inicial consideramos ter sido tomada da geometria arquimediana. Seu trabalho ganhou corpo na medida em que ele continuou investigando, experimentando e demonstrando que o método embrionariamente fundado na geometria da exaustão seria a base de apoio para toda a estrutura erguida na elaboração da teoria das fluxões e, posteriormente, do cálculo, além de promover avanços que foram adotados posteriormente, por estudiosos sobre análise matemática, mesmo aqueles que se mostraram críticos ao seu trabalho, como foi o caso de George Berkeley ao publicar *The Analyst* (O Analista), em 1734, se opondo a algumas partes do trabalho de Newton sobre as fluxões.

Ficou bem claro que a crítica de George Berkeley ao método das fluxões enfatizava que tal método teria sido fundado inescapavelmente em infinitesimais ou em uma mudança de hipóteses, ambas logicamente indefensáveis. E a partir daí que o tratado das fluxões, publicado por Maclaurin, foi amplamente citado pelos fluxionistas britânicos como uma resposta definitiva às críticas de Berkeley. Além desse fato, o livro de Maclaurin obteve um alcance maior, uma vez que seu trabalho foi citado com admiração por Lagrange, Euler, Clairaut, d'Alembert, Laplace, Legendre, Lacroix e Gauss.

Igualmente, a influência do uso de sua álgebra de desigualdades como base para seus argumentos sobre o conceito de limite foi muito bem incorporada posteriormente aos trabalhos de d'Alembert, L'Huilier, Lacroix e Cauchy. Eis um aspecto importante para novos estudos investigativos sobre o desenvolvimento, apropriação e representação histórica desse conceito no campo da matemática em seu caráter científico e disciplinar.

**Agradecimentos**

Nossos agradecimentos ao apoio e suporte financeiro concedido pelo CNPq, que viabilizou o desenvolvimento das atividades de pesquisa de um dos autores por meio da bolsa de produtividade em pesquisa no Brasil.

**Bibliografia**

ARANTES SAD, L. Problemas epistemológicos no período de emergência do cálculo infinitesimal. **Revista Brasileira de História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 2, n. 3, p. 65-91, 2020. DOI: 10.47976/RBHM2002v2n365-91.

BOYER, Carl Benjamim. *História da Matemática.* São Paulo: USP, 1974.

CALAZANS, Alex. *Newton e Berkeley:* As críticas aos fundamentos do Método das Fluxões n'O Analista. 2008. 111f. Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Centro de Educação Letras e Artes da Universidade Federal de Paraná - UFPR, Curitiba, 2008.

CALAZANS, Verônica Ferreira Bahr. *A Filosofia da matemática nos Principia de Newton e suas implicações ontológicas*. 2014. 156f. Tese (Doutorado em Filosofia) – Universidade de São Paulo – USP, São Paulo, 2014.

D'OTTAVIANO, I. M. L.; BERTATO, F. M.. George Berkeley e os fundamentos do cálculo diferencial e integral. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**. Campinas, Série 4, V. 1, n. 1, pp.33-73, 2015.

GEROMEL MENEGHETTI, R. C.; BICUDO, I. O que a história do desenvolvimento do cálculo pode nos ensinar quando questionamos o saber matemático, seu ensino e seus fundamentos. **Revista Brasileira de História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 2, n. 3, p. 103-118, 2002. DOI: 10.47976/RBHM2002v2n3103-118.

LIMA, R. S.; GRIMBERG, G. E. Os tratados de George Salmon no contexto da matemática britânica no século XIX: De uma abordagem sintética para uma abordagem analítica. **Revista Brasileira de História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 19, n. 38, p. 45-81, 2020. DOI: 10.47976/RBHM2019v19n3845-81.

GUICCIARDINI, Niccolò. *Isaac Newton on mathematical certainty and method*. United States of America: Massachusetts Institute of Technology, 2009.

MACLAURIN, Colin. *A Treatise of Fluxions*. In Two Books. Edinburgh: Printed by T.W. and T. Ruddimans, 1742.

MENDES, Iran Abreu. A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. *A história como um agente de cognição na Educação Matemática*. Porto Alegre/RS: Sulina, 2006.

MENDES, Iran Abreu. *Investigação Histórica no Ensino da Matemática.* Rio de Janeiro/RJ: Editora Ciência Moderna, 2009.

MENDES, Iran Abreu. História da Matemática no ensino: entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas. São Paulo: LF editorial, 2015.

MENDES, Iran Abreu. *Criatividade na história da criação matemática:* potencialidades para o trabalho do professor. Belém: SBEM-PA, 2019.

MENDES, Iran Abreu. *Os usos da história no ensino da matemática:* reflexões teóricas e experiências. 3. Ed. Revista e Ampliada. São Paulo: LF Editorial, 2022.
MOL, Rogério Santos. *Introdução à História da Matemática.* Belo-Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

NEWTON. Isaac. *The Method of fluxions and infinite series.* Londres, 1736.

NEWTON, Isaac. *De Gravitatione Et Aequipondio Fluidorum*. Tradução W. B. Allen. Disponível em: <http://williambarclayallen.com/translations/De_Gravitatione_et_Aequipondio_Fluidorumtranslation.pdf>. Acesso em 20/04/2022.

PANZA, Marco. *Das velocidades às fluxões*. Scientiæ Zudia, São Paulo, v.8, n.4, p. 509-546, 2010.

REZENDE, Wanderlei Moura. *O ensino de Cálculo:* Dificuldades de natureza epistemológica. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. São Paulo: USP, 2003.

SILVA, Maria Deusa Ferreira da. *Problemas e modelos que contribuíram com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral:* dos gregos a Newton. Tese (Doutorado em Educação). Natal: UFRN, 2010.

WESTFALL, Richard S. *A vida de Isaac Newton*. Tradução Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.

**Iran Abreu Mendes**
Instituto de Educação Matemática e Científica – IEMCI/UFPA – Belém (PA) – Brasil

**E-mail:** iamendes1@gmail.com

**Evanildo Costa Soares**
Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PPGECM/UFRN – Natal (RN) – Brasil

**E-mail**: nildo_23@hotmail.com