Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 24, nº48 - pp. 1–32
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

SOBRE OS NÚMEROS P-ÁDICOS: ASPECTOS HISTÓRICOS, MATEMÁTICOS E EPISTEMOLÓGICOS

Francisco Regis Vieira Alves
Intituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE

Paulo César Cavalcante de Oliveira
Univerversidade Regional do Cariri - URCA

(aceito para publicação em abril de 2023)

Resumo

Reconhecidamente, o processo de engendramento evolutivo matemático que concorreu para a evolução e a determinação de bases sólidas para a noção de número real constitui um emblemático divisor de águas para a Matemática no século XIX. Assim, a partir de um conhecimento atual de vários métodos e formas de determinação e do completamento do corpo dos números racionais, a despeito do método empregado, podemos indicar a natureza de um corpo arquimediano e completo que nominamos por conjunto dos números reais. Não obstante, o presente trabalho apresenta uma discussão de elementos históricos, matemáticos e epistemológicos sobre uma outra classe de números que representa, também, um completamento do conjunto dos números racionais e que se denota por Q_p, onde p é um número primo. Dessa forma, os números p-ádicos são apresentados, tendo em vista proporcionar ao leitor uma vital compreensão do seu papel epistemológico que concorre para um entendimento diferenciado e substancialmente ampliado para a noção abstrata e basilar em Matemática do que conhecemos ordinariamente por número.

Palavras-chave: Números p-ádicos, História da Matemática, Intuição, Topologia dos números p-ádicos.

[ON THE P-ADIC NUMBERS: HISTORY, MATHEMATICAL AND EPISTEMOLOGICAL ASPECTS]

Abstract

Admittedly, the process of evolutionary mathematical engendering that contributed to the evolution and determination of solid foundations for the notion of real numbers constitutes an emblematic watershed for the mathematics in the nineteenth century. Thus, from a current knowledge of various methods and ways of determining and completing the body of rational numbers, regardless of the method employed, we can indicate the nature of an archimedean and complete body that we call the set of real numbers. Nevertheless, the present work presents a discussion of historical, mathematical and epistemological elements about a class of numbers that represent, also, another completeness of the set of rational numbers and it´s denoted by Q_p, where $p$is a prime number. Thus, p-adic numbers are presented, in order to provide the reader with a vital understanding of their epistemological role that competes for a differentiated and substantially extended understanding of the basic abstract notion in Mathematics of what we know ordinarily by number.

Keywords: p-adic numbers, History of Mathematics, Intuition, Topology of p-adic numbers.

Introdução

Encontramos nos compêndios especializados de Fundamentos da Análise, de modo *standard*, as considerações primitivas e basilares a respeito dos processos matemáticos e epistemológicos que engendraram e determinaram progressivamente a consolidação dos fundamentos e os pressupostos sobre os conjuntos numéricos, sua construção axiomática correspondente, desde os números naturais IN, números inteiros Z, números racionais Q e, enfim, chegando ao conjunto dos números reais IR e os números complexos.

Não obstante, alguns aspectos permitem uma compreensão eminentemente histórica e evolutiva e que não podem ser desconsiderados. O primeiro aspecto envolve a multiplicação de métodos matemáticos distintos ou, ainda, possíveis aplicações que correspondem para a determinação/construção do corpo arquimediano dos números reais IR. Segundo, um processo ininterrupto de generalização progressiva e estruturante para a própria noção de número, em seu sentido abstrato e epistemologicamente ampliado do termo. Todavia, não podemos negligenciar um caminho tortuoso, nem sempre contíguo e que se consubstancia por intermédio de eventos históricos sucessivos e que se originam desde os antigos gregos. Nesse sentido, Kato, Kurokawa e Saito (2000) introduzem um ponto de vista ímpar sobre a evolução da noção de número p-ádico, quando esclarecem que:

> "*Todavia, a teoria dos números reais desenvolvida no século XIX não colocou em evidência outros questionamentos gregos, tais como: o que é um número? Em torno de cem anos, usando um método similar para a*

> *construção dos números reais a partir dos racionais, o mundo dos números p-adicos foi estabelecido para cada primo p a partir dos números racionais. Eles formam um mundo bastante diferente do mundo dos números reais, todavia, eles se tornam bastante importantes no mundo dos números reais*". (KATO, KUROKAWA E SAITO, 2000, p. 3).

No trecho acima, além de observarmos que Kato, Kurokawa e Saito (2000) indicam uma longa trajetória evolutiva dos números racionais até, finalmente, a fundamentação para os números reais, divisamos a menção de outra entidade conceitual (os números p-ádicos) e que suas relações com os números racionais podem ser compreendidas a partir da Figura 1, cujo esquema conceitual é indicado, também, por Kato, Kurokawa e Saito (2000, p. 3). Abaixo, na Figura 1, podemos compreender que ocorrem as seguintes inclusões $Q \subset Q_p$ e $Q \subset IR$.

$$\{p\text{-adic numbers}\} \supset \{\text{rational numbers}\} \subset \{\text{real numbers}\}$$

Figura 1. Relações envolvidas entre os números racionais, números reais e os números p-ádicos sugeridas e discriminadas por Kato, Kurokawa e Saito (2000)

Não podemos deixar de retratar abaixo um outro trecho produzido por Kato, Kurokawa e Saito (2000) ao comentarem o trabalho pioneiro de Kurt Hensel (1861-1941) que apresentou a primeira definição formal sobre os números p-ádicos em um artigo intitulado *Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen*. (VACCON, 2015, p. 17). Cabe registrar um ponto de vista relativamente poético e ainda metafórico envolvendo relações entre os números racionais, os números reais e os números p-ádicos.

> "*Os números p-ádicos foram introduzidos por K. Hensel em torno de 1900. Na longa história da Matemática um número significou um número real, e foi apenas recentemente que se verificou que existe um mundo dos números p-ádicos. E isto ocorreu apenas com quem observou o céu durante o dia e ficou maravilhado com o céu durante a noite. O cenário matemático é completamente diferente para Q_p, que emite a luz de um número primo a noite no céu como uma estrela que não se pode ver em virtude do sol, os números reais, ou o corpo dos números reais IR, que emite a luz durante o dia. Da mesma forma que contamos as estrelas durante a noite, existe um Q_p, para cada primo p. Cada estrela é para o sol o que Q_p representa para IR. Assim como podemos ver objetos no espaço a noite, nós*

> *começamos a ver um universo profundo por meio dos números p-ádicos*". (KATO, KUROKAWA e SAITO, 2000, p. 3)

Diante do metafórico cenário anterior, declaramos aqui nosso interesse maior pela discussão dos aspectos históricos, matemáticos e evolutivos (ALVES, 2017; ALVES & CATARINO, 2022) sobre os números p-ádicos que representam, por exemplo, uma outra espécie evolutiva e generalizada da noção abstrata de número. Por conseguinte, nas seções subsequentes, o primeiro aspecto a ser discutido busca identificar determinados fatores de gênese e que concorreram/determinaram o surgimento e uma compreensão evolutiva para a importante noção dos números p-ádicos.

Logo em seguida, propugnamos que um viés explicativo de ordem histórica e a gênese de uma entidade conceitual abstrata não pode dispensar uma apreciação, de *per si*, da própria matemática e dos modelos ortodoxos formais, teoremas e outras propriedades matemáticas emanadas por tal entidade conceitual, sem desconsiderar um viés intuitivo e que permite um expediente metafórico e analógico, tomando como referência primária determinados modelos numéricos conhecidos a partir dos demais conjuntos numéricos. Por fim, em nossa última seção do trabalho, abordaremos uma perspectiva epistemológica, na medida em que compararemos, relacionaremos e distinguiremos propriedades comuns entre os principais conjuntos numéricos que conhecemos, nomeadamente, o conjunto dos naturais, inteiros, racionais e reais, com o conjunto dos números p-ádicos e suas correlações que concorrem para a ampliação do nosso ponto de vista contemporâneo sobre a noção conceitual e abstrata de número.

Antes, porém, vamos considerar os seguintes números especiais que indicamos por $\ldots 2306244$ e $\ldots 1652332$. De imediato, podemos adquirir aqui uma estranha e tácita impressão, desde que, estamos acostumados em convencionar em expansão decimal com a indicação de casas decimais e sua expansão à direita, como por exemplo, as sucessivas representações decimais (na base 10), que correspondem a um processo de aproximação e uma sequência de números racionais que convergirá para um número não racional. Podemos compreender na Fig. 2, a partir da ilustração sugerida por Kato, Kurokawa e Saito (2000, p. 63). De modo sucinto, recordamos o exemplo indicado por Hefez (2013, p. 158), com a seguinte sequência de números racionais $r_1 = 1, r_{n+1} = \frac{4r_n}{2+{r_n}^2}, \forall n \in IN$ que converge para $\alpha = \sqrt{2}$, bastando considerar a existência do seguinte limite $\lim_n r_n = \alpha \notin Q$.

$$\boxed{1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots \rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.}$$

Figura 2. Descrição de uma sequência convergente de racionais que se aproxima de um número não racional e revela os buracos "*gaps*" dos racionais mediante distribuição na reta.

Em seguida, vamos indicar, logo abaixo, duas operações binárias distintas (aditiva e multiplicativa) descritas na base '7' para os números $\ldots 2306244_7$ e $\ldots 1652332_7$:

$$\begin{array}{rr} & \ldots 2306244_7 \\ + & \underline{\ldots 1652332_7} \\ & \ldots 4261606_7 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & \ldots 2306244_7 \\ \times & \underline{\ldots 1652332_7} \\ & \ldots 4615521 \\ & \ldots 225065 \\ & \ldots 25065 \\ & \ldots 5521 \\ & \ldots 616 \\ & \ldots 63 \\ & \underline{\ldots 4 \quad\quad} \\ & \ldots 4320301_7 \end{array}$$

Decerto que as operações, argumentos e notações assumidas acima requerem um maior detalhamento visando uma discussão substancial e minucioso do assunto concernente aos números p-ádicos, todavia, antes considerar um trato pormenorizado sobre tal matéria, vejamos alguns aspectos epistemológicos de gênese concernente aos números p-ádicos. Dessa forma, logo adiante, poderemos compreender a natureza desses números que se prolongam ou se propagam indefinidamente para a esquerda, que representam extensões independentes dos números racionais (ROBERT, 1996, p. 2) e que podem contrariar, em certa medida, nossa intuição, na instância em que tomarmos sua interpretação topológica.

Alguns elementos de ordem histórica sobre os números p-ádicos

Em 1850, o matemático alemão Erns Kummer (1810–1893) introduziu os números p-ádicos, todavia, Kurt Hensel (1861–1941) foi o primeiro a desenvolver uma teoria para os números p-ádicos no interior de uma teoria algébrica dos números em termos de série de potências e construiu o corpo dos números p-ádicos (RIBENBOIM, 1999, p. 1). Algum tempo depois, os números p-ádicos foram generalizados por intermédio de uma teoria das valorizações estudada por Jozsef Kurschak em 1913, por Hermann Minkowski (1864 - 1909) e outros matemáticos ilustres como, por exemplo, Jean-Pierre Serre (1926–?).

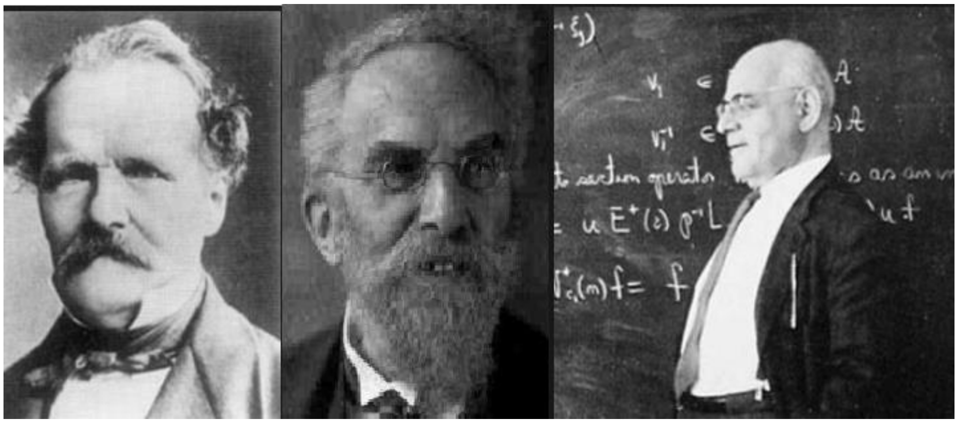

Figura 3. Erns Kummer (1810–1893) introduziu a noção de números p-ádicos e Kurt Hensel (1861–1941) desenvolveu uma teoria formal e Alexander Markowich Ostrowski (1893–1986) provou a existência de dois completamentos dos racionais.

Corry (2004, p. 184) explica que Kurt Hensel nasceu em Konigsberg e estudou em Bonn e Berlim. Dentre os professores que desenvolveram maior influência sobre ele, podemos citar Lipschitz, Weierstrass e Kronecker. Corry assinala que K. Hensel estudou completamente os trabalhos de Richard Dedekind (1831–1916). Em 1901, Hensel trabalhou em Marburg onde pesquisou, ensinou e foi editor do prestigiado jornal intitulado *Journal fur die reine und angewandte Mathematik.* Corry (2004, p. 185) comenta que em 1902, Hensel foi co-autor do livro do matemático Georg Landsberg (1865–1912) sobre a teoria algébrica das funções. Nesse sentido, o autor comenta uma perspectiva inovadora introduzida no livro.

> "*O livro apresentado é bastante equilibrado envolvendo uma combinação das abordagens tanto de R. Dedekind, bem como de Kronecker, em determinadas seções relevantes. A abordagem desenvolvida por Hensel e Landsberg possui claramente próxima influência de Dedekind cujo conhecimento matemático foi peculiar ao pensamento algébrico do século XIX. E é verificado que as ideias propostas por Dedekind poderiam ser generalizadas, sem a necessidade de lidar com outras abordagens estruturais desenvolvidas somente muito tempo depois no campo da Álgebra*". (CORRY, 2004, p. 185)

Toda uma teoria sobre os números p-ádicos foi desenvolvida pelo matemático Kurt Hensel (1861 – 1941). Rozikov (2013, p. 3) comenta que no momento de sua introdução, os números p-ádicos eram considerados ou apreciados como pura criação exótica intelectiva e abstrata em Matemática e que, de modo preliminar, não se vislumbrou nenhuma aplicação imediata. Entretanto, algum tempo depois, Rozikov (2013) constata e acentua que:

> "*Desde que um número p-ádico possui uma propriedade interessante que se diz que se mostram próximos quando suas diferenças são divisíveis por determinada potência de um primo p e quanto maior a potência maior sua proximidade. Esta propriedade confere aos números p-ádicos que encerram várias informações em termos de congruências em termos que lhes conferem um grande potencial de aplicações na teoria dos números incluindo, por exemplo, na famosa prova do último teorema de Fermat*." (ROZIKOV, 2013, p. 3)

Por definição, um número inteiro p-ádico é uma soma formal infinita da forma $x = a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3 + a_4p^4 + \cdots + a_np^n + \cdots = \sum_{i=0}^{+\infty} a_ip^i$, com os coeficientes inteiros $0 \le a_i \le p-1$. Em outras palavras, um número p-ádico é um inteiro escrito na base p que é um número primo qualquer, com infinitos dígitos, cuja notação será indicada por $x = \cdots a_ia_{i-1}a_{i-2}a_{i-3}\cdots a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$. Agora podemos compreender os dois números especiais (p-ádicos) indicados anteriormente por $\ldots 2306244$ e $\ldots 1652332$.

Por outro lado, um número p-ádico é também uma soma formal infinita da forma $x = a_{-n}p^{-n} + a_{-n+1}p^{-n+1} + \cdots + a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3 + \cdots + a_ip^i + \cdots = \sum_{i=-n}^{+\infty} a_ip^i$, com os coeficientes inteiros $0 \le a_i \le p-1$. Reparemos que ainda podemos escrever a soma anterior da forma: $x = \frac{a_{-n}}{p^n} + \frac{a_{-n+1}}{p^{n+1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{p^1} + a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3 + \cdots + \cdots$. Portanto, assumiremos a seguinte notação $x = \cdots a_ia_{i-1}\cdots a_3a_2a_1a_0a_{-1}a_{-2}a_{-3}\cdots a_{-n}$.

Por exemplo, podemos verificar que $\frac{1}{10} = 3\cdot 5^{-1} + 2\cdot 5^0 + 2\cdot 5^1 + 2\cdot 5^2 + \cdots \in Q_5$ ou $\frac{1}{3} = 2\cdot 5^0 + 3\cdot 5^1 + 1\cdot 5^2 + 3\cdot 5^3 + 1\cdot 5^4 + 3\cdot 5^5 \cdots \in Q_5$. Ou ainda, podemos considerar a seguinte soma infinita: $-1 = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + (p-1)p^3 + (p-1)p^4 \cdots$. Reparemos que se somarmos 1 na expressão anterior e agrupando os termos sublinhados abaixo e, ao efetuar os cancelamentos correspondentes, poderemos observar que:

$$\begin{array}{l}
\underline{1 + (p-1)} + (p-1)p + (p-1)p^2 + (p-1)p^3 + (p-1)p^4 + \cdots + (p-1)p^n + \cdots \\
\underline{p + (p-1)p} + (p-1)p^2 + (p-1)p^3 + (p-1)p^4 + \cdots + (p-1)p^n + \cdots \\
\underline{p^2 + (p-1)p^2} + (p-1)p^3 + (p-1)p^4 + \cdots + (p-1)p^n + \cdots \\
\underline{p^3 + (p-1)p^3} + (p-1)p^4 + \cdots + (p-1)p^n + \cdots \\
\quad \vdots\vdots \\
= 0
\end{array}$$

Com origem em algumas operações semelhantes, podemos verificar que $Z \subset Z_p$ como um subanel, por exemplo, os elementos $0 = \sum_{i=0}^{+\infty} 0\cdot p^i$ e $1 = 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} 0\cdot p^i$ são o elementos neutro e unidade em Z_p. Acima divisamos determinadas operações com somas e parcelas infinitas que podem determinar resultados inesperados e que vamos retomar um pouco mais adiante. Isso posto, cabe observar que a motivação de K. Hensel era a de se conseguir obter informações locais dentro do corpo dos racionais Q, de uma maneira análoga a teoria das sequências e séries existentes nos números reais. Gouvêa (1997, p. 1) comenta que a motivação de K. Hensel (ver na Figura 3, no centro) derivava de um modelo originado dos números inteiros e seu correspondente corpo de frações que conhecemos, de modo *standard*, por números racionais e, também, do anel das funções polinomiais, com coeficientes complexos e seu correspondente corpo de frações polinomiais.

Assim, para um número racional temos $x = \frac{a}{b}$, com $a, b \in Z, b \neq 0$ ou, para o caso do anel $C[x]$ o anel das funções polinomiais, com os respectivos coeficientes complexos, podemos determinar a descrição da função racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, com $p(x), q(x) \in C[x], q(x) \neq 0$. Ademais, como explica Gouvêa (1997, p. 1 – 2) em ambos os anéis de funções polinomiais contamos com a fatorização única de seus elementos.

Compreendemos que uma das principais analogias de Hensel foi observar que "os números primos em $p \in Z$ eram semelhantes aos polinômios lineares $x - c \in C[x]$" (GOUVÊA, 1997, p. 2). Todavia, a analogia empregada por Kurt Hensel foi mais profunda ainda. Nesse sentido, Gouvêa explica que Hensel empregou o resultado que, dado uma função polinomial $p(x)$ na variável x e um número complexo α podemos utilizar a expansão de Taylor em uma série formal, em torno de tal ponto α da seguinte forma: $p(x) = a_0 + a_1(x - \alpha)^1 + a_2(x - \alpha)^2 + \cdots + a_n(x - \alpha)^n$, aonde $a_1 \in C$. E, a partir de um entendimento semelhante, dado um inteiro m podemos escrevê-lo na base 'p' da seguinte forma: $m = a_0 + a_1p^1 + a_2p^2 + \cdots + a_np^n = \sum_{i=0}^{n} a_i\, p^i$, com $0 \leq a_i < p$.

Neukirch (1999, p. 101) explica ainda que "a partir de uma analogia entre a série de Laurent $f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n(z - a)^n$ extendemos o domínio dos números p-ádicos a partir da série formal $\sum_{n=-m}^{+\infty} a_n \cdot p^n = a_{-m}p^{-m} + a_{-m+1}p^{-m+1} + \cdots + a_{-1}p^{-1} + a_0p^0 + a_1p^1 + \cdots$, onde $m \in Z, 0 \leq a_i < p$. Tais séries determinam os elementos do conjunto Q_p". Hasse (1980, p. 151) comenta que a poderosa, ampla e também diversificada aplicabilidade das representações de séries de potências na teoria das funções na variável complexa "foi o que deu a Hensel a ideia de criar uma ferramenta correspondente também para a teoria dos números, e assim o levou aos números p-ádicos".

Neukirch (1999, p. 101) acrescenta ainda que todo número racional $q \in Q$ pode ser escrito da forma $q = \frac{g}{h} \cdot p^{-m}, g, h \in Z$ e $MDC(gh, p) = 1$. E se temos uma expansão do termo $\frac{g}{h}$ na forma $a_0 + a_1p^1 + a_2p^2 + \cdots$ que é uma expansão p-ádica do número $\frac{g}{h}$. Assim, teremos de imediato, uma expansão p-ádica para o número racional $q \in Q$ da forma: $a_0p^{-m} + a_1p^{-m+1} + a_2p^{=m+2} + \cdots + a_mp^{-m+m} + a_{m+1}p^1 + a_{m+2}p^2 + \cdots \in Q_p$. De forma simples, podemos dizer que o conjunto Q_p representa o corpo de frações para o anel Z_p, de forma matemática e exatamente semelhante, como sabemos que o conjunto dos números racionais representa o corpo de frações dos números inteiros (HEFEZ, 2013).

A noção de números p-ádicos proporciona relativizar determinadas propriedades clássicas a respeito dos números reais. Nesse sentido, Rozikov (2013, p. 3) comenta que, a partir da propriedade arquimediana dos números reais (FERREIRA, 2010) e para todo segmento de linha reta, podemos obter um outro que supera o mesmo, com origem na soma (acréscimo) de um pequeno segmento. Não obstante, tal axioma não é válido em Q_p!

Em 1910, Ernst Steinitz (1871–1928) publicou seu trabalho fundamental sobre teoria de campo citando os números p-ádicos como sua maior motivação. Nesse mesmo ano, graças às obras de Maurice Fréchet (1878–1973), Frigyes Riesz (1880–1956) e outros matemáticos, outras idéias topológicas se tornaram mais evidentes e isso permitiu uma compreensão dos números p-ádicos sob o ponto de vista topológico (ORBEGOSO, 2016).

Em 1912, o matemático húngaro József Kürschák (1864–1933) definiu os valores absolutos, esta nova definição permitiu interpretar Q_p em termos de espaços métricos e topológicos. K. Hensel, por sua vez, fez várias obras e livros, nos quais ele simplificou a teoria da divisibilidade em números algébricos usando os números p-ádicos. No entanto, Hensel não usou a definição de Kürschák de valorizações, mas introduziu limites e testou a integridade do Q_p. Em 1917, Alexander Markowich Ostrowski (1893–1986) (ver figura 1, ao lado direito) forneceu o teorema do valor absoluto em para o conjunto dos números racionais. Na prática, a ideia de Ostrowski envolveu considerar diferentes possibilidades de definirmos um valor absoluto sobre um corpo qualquer IK o que de modo irremediável, condiciona e ainda altera a noção de distância no referido corpo e, por conseguinte, a ideia intuitiva de proximidade/vizinhança. Tal ponto de vista pode ser significado quando tomamos a construção dos números reais, segundo o método de Cauchy e a necessidade de convergência de sequências de Cauchy. Por outro lado, quando consideramos o corpo dos números racionais, de modo particular, podemos verificar que existem, precisamente, três famílias de valores absolutos, equivalentes entre si, sobre o corpo dos racionais Q.

Ademais, após o pioneiro trabalho de Hensel, cujas raízes foram primitivamente lançadas por Ernst Kummer (1810–1893) (ver figura 3, ao lado esquerdo), vislumbramos um vigor indene evolutivo da noção e sua repercussão correspondente em vários outros ramos da Matemática e da Física Matemática. Nesse sentido, Ostragozo (2016) explica um exemplo de avanço para teoria algébrica dos números, ao recordar o problema:

> "*Em 1921, Helmut Hasse, em sua tese de doutorado, propõe e testa o Princípio Local Global para a representação de um número racional por uma forma quadrática com coeficientes em Q, em outras palavras: seja* $a \in Q, f \in Q[X_1, X_2, \dots X_n]$ *uma forma quadrática, então a afirmação "existem* $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ *tal que* $a = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ *ocorre em* Q *se, e somente se, temos a mesma propriedade em* IR *e* Q_p*, para cada p primo*". (OSTRAGOZO, 2016, p. 2).

Durante os anos 1920 a 1935, toda uma teoria completa de valores absolutos é desenvolvida, graças às contribuições de Deuring, Schmidt, Krull, etc. Atualmente, os números p-ádicos são usados em muitas áreas da matemática, tais como Teoria dos Números, Geometria Algébrica, Topologia Algébrica, Análise Ultra-métrica, Equações diferenciais e Sistemas p-dinâmicos. Assim, diante do contexto histórico apontado na presente seção, doravante, ensejamos assinalar determinados aspectos de ordem perceptual e intuitiva e, por que não mencionar, heurística e analógica, visto que, muitas propriedades dos números p-ádicos são compreendidas e significadas na medida em que consideramos os conjuntos numéricos clássicos, tais como os números naturais, os números inteiros, os números racionais, reais e os números complexos.

Alguns elementos de ordem intuitiva sobre os números p-ádicos

De modo prosaico, os matemáticos resolvem problemas de arranjar pontos alinhados, em uma reta, e preenchem as "lacunas" com determinadas entidades conceituais que denominamos como números irracionais, e tal atitude cria um sistema completo que denominamos de números reais. Por outro lado, quando empregamos a norma usual dos números p-ádicos podemos encontrar propriedades inesperadas (quando possuimos o mesmo interesse em preencher determinadas "lacunas") que contrariam nossa percepção geométrica intuitiva fundamentalmente afetada pela norma ou valor absoluto usual definido sobre os números racionais. Nesse sentido, podemos observar e verificar que, todos os triângulos em Q, com a métrica p-ádica, são isósceles e o comprimento da base não excede o comprimento dos lados. Como também, todo o ponto de cada bola é centro da bola ou, equivalentemente, dadas duas quaisquer não-disjuntas, uma delas contém a outra. (CARVALHO e LOURENÇO, 2015, p. 6).

Um pouco mais adiante, retornaremos ao devido trato pormenorizado das ilações anteriores. Antes, porém, vamos considerar a seguinte equação $x = 1 + 3x$. Oliveira (2009) explica que quando propomos tal tarefa a um matemático, podemos esperar que o mesmo opte em empregar, eventualmente, um método interativo e considerar a seguinte equação $x_{n+1} = 1 + 3x_n$. Ademais, o nosso matemático hipotético considera como valor inicial $x_0 = 1$. Assim, o mesmo obteve, sucessivamente, as seguintes equações recursivas:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 1 + 3 \\ x_2 = 1 + 3x_1 = 1 + 3(1+3) = 1 + 3^1 + 3^2 \\ x_3 = 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 \\ \vdots \\ x_n = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1} + 3^n \end{cases} \therefore x_n = \sum_{i=0}^{n} 3^i.$$

Por outro lado, admitindo que o mesmo assumiu a existência do seguinte limite $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ e, dessa forma, poderemos avaliar, calcular e ainda encontrar que ocorre $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} 3^i = \sum_{i=0}^{+\infty} 3^i$. Não obstante, Oliveira (2009, p. 7) pondera a possibilidade de que o nosso matemático hipotético preferiu não apresentar a solução como correspondente a séria geométrica $\sum_{i=0}^{+\infty} 3^i$. Por conseguinte, o mesmo recordou a seguinte propriedade elementar e identidade: $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n + \cdots = \frac{1}{1-\alpha}$. Assim, quando realizou a substituição conveniente, o matemático hipotético objetivado por Oliveira (2009) determinou a seguinte soma: $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n + \cdots = \frac{1}{1-3} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$.

Ora, quando retornamos à equação $x = 1 + 3x$ podemos depreender, rapidamente, que determinamos sua solução. Não obstante, todos os métodos matemáticos empregados são consistentes e críveis? A despeito de determinar uma solução correta, cabe observar que a igualdade $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n + \cdots = \frac{1}{1-\alpha}$ é garantida para a série geométrica apenas quando $0 \leq |\alpha| < 1$ (LAGES, 1999). Nesse caso, o matemático hipotético usou um procedimento indevido anterior pois a série $\sum_{i=0}^{+\infty} 3^i$ diverge, todavia, funciona! No trecho seguinte Oliveira (2009) recorda o papel de profícuas ideias em Matemática que, apesar da aparente inconsistência e/ou desconfiança, podem convergir para outros avanços ulteriores.

> "*Mas, na minha terceira pergunta, muitos não se limitariam a uma resposta tão sucinta. Diriam que quando alguma coisa funciona sem se perceber porquê ou há coincidências ou semelhanças inexplicáveis, há uma razão escondida para isso. Em tais casos, deve procurar-se se é possível construir uma teoria que dê racionalidade, elimine os milagres e torne tudo compreensível. O problema reside em descobrir os conceitos apropriados. Pode recordar-se a Teoria das Distribuições e a função de Dirac, o início dos números complexos e muitos outros exemplos. E vale a pena lembrar as teorias unificadoras (dão unidade a factos dispersos que parecem coincidências) como a Teoria dos Matróides em conjunção com o artigo fundador de H. Whitney publicado na década de trinta*". (OLIVEIRA, 2009, p. 8)

Isso posto, retornamos ao engenhoso expediente desenvolvido por Oliveira (2009). Assim, podemos observar que a série numérica $\sum_{i=0}^{+\infty} 3^i$ diverge, todavia, seria possível fazê-la convergir? A resposta é prontamente descrita por Oliveira (2009) da seguinte forma:

> "*Substituamos a série pela sucessão associada em que o elemento 'u_n' é a soma das primeiras n+1 parcelas da série. Convergência ou divergência de sucessões é uma questão de topologia, no nosso caso simplesmente uma questão de métrica. No caso vertente, só lidamos com números racionais (para efeitos de convergência até é com inteiros, mas há vantagem em utilizarmos os racionais uma vez que constituem um corpo e assim todos os elementos, distintos de zero, têm inverso)*". (OLIVEIRA, 2009, p. 8).

O ponto de vista acima que nosso problema pode ser descolocado para o trato de outro campo numérico, isto é, dada uma sequência $\{u_n\}_{n\in IN}$ de números racionais $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$. É possível fazê-la convergir? Ou ainda, é possível definir uma métrica nos racionais de forma que a mesma convirja? Antes, porém, vejamos precisamente o que é mesmo uma métrica e qual métrica podemos definir sobre o conjunto dos racionais. De modo ordinário, precisamos recorrentemente determinar a distância entre dois números racionais. Neste caso, nos acostumamos medi-la por intermédio de um valor absoluto.

Por exemplo, dados os racionais $r, s \in Q$ a distância correspondente será dada pelo seguinte valor absoluto $|r - s|$. E o que significa o valor absoluto de um número racional? Trazemos, pois, a seguinte definição matemática formal.

Definição 1: Um 'valor absoluto' no conjunto dos racionais é definido por uma aplicação $\phi: Q \to Q^+$ que goza das seguintes propriedades, para quaisquer $r, s \in Q$.
(i) $\phi(r) = 0 \leftrightarrow r = 0$; (ii) $\phi(r \cdot s) = \phi(r) \cdot \phi(s)$; (iii) $\phi(r + s) \leq \phi(r) + \phi(s)$

Oliveira (2009) apresenta um importante ponto de vista a respeito da aplicação definida há pouco, quando pondera que:

> "*Um pouco de estudo leva-nos à conclusão de que o importante não é a concretização da aplicação de Q em Q^+ mas sim certas propriedades que ela pode ter (ou não ter). Se se examinarem as demonstrações cuidadosamente, conclui-se que o que essencialmente se utiliza para os grandes resultados são certas propriedades de ϕ, não sendo importante o que ϕ é de facto*". (OLIVEIRA, 2009, p. 8).

Nesse caso, Oliveira (2009) comenta precisamente a possibilidade de definirmos três valores absolutos que gozam das propriedades indicadas (i), (ii) e (iii). De fato, o trivial pode ser indicado por $\phi(0) = 0, \phi\left(\frac{m}{n}\right) = 1$ sempre que $\frac{m}{n} \neq 0$. Nesse caso temos uma condição trivial. Entretanto, "há mais, como vamos ver. Pode ser que algumas delas torne a série $\sum_{i=0}^{+\infty} 3^i$ convergente" (OLIVEIRA, 2009, p. 9). Para tanto, Oliveira (2009) comenta que, dado um número racional $\frac{m}{n}$ podemos escrever, de forma única, a seguinte fração $\frac{m}{n} = p^k \cdot \frac{m\prime}{n\prime}$, com o expoente $k \in Z$ sendo um inteiro (positivo, negativo ou nulo), m' e n' são inteiros não divisíveis por $p \in IN$ um número primo arbitrário.

Bem, neste ponto Oliveira (2009) não fornece ao leitor maiores resultados que confirmam sua ilação, entretanto, apresenta exemplos ilustrativos. Vejamos, por exemplo, o caso da fração $\frac{m}{n} = \frac{3}{10} = 5^{-1} \cdot \frac{3}{2}$ ou, se considerarmos $\frac{m}{n} = \frac{8}{30} = 3^{-1}\frac{4}{5}$. Assim, a partir da decomposição $\frac{m}{n} = p^k \cdot \frac{m\prime}{n\prime}$ Oliveira (2009, p. 9) define: $\phi_p\left(\frac{m}{n}\right) = p^{-k}$ (*). Isso posto, no caso anterior, podemos verificar que $\phi_p\left(\frac{3}{10}\right) = (5)^{-(-1)} = 5$ e compara o valor absoluto definido em (*) como um outro do tipo que designa por $\phi_\infty\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}$. Vejamos que a função acima goza das propriedades indicadas na definição 1. Vejamos um exemplo discutido por Oliveira (2009, p. 9). Tomemos o valor $93.750 = 5^5 \cdot 6 = 5^6 \cdot \frac{6}{1}$ e $p = 5$.

Nesse caso, devemos ter que $\phi_5(93.750) = (5)^{-6} = \frac{1}{15.625} = 0{,}000064$. Neste ponto, Oliveira (2009) comenta que em termos intuitivos dir-se-ia que na norma $\phi_\infty(93.750) = 93.750$ é grande, todavia, na norma, o valor $\phi_5(93.750) = 0{,}000064$ é muito pequeno. Com consequência, quando tomarmos a norma ϕ_∞ podemos verificar que a distância respectiva entre os números $\phi_\infty(93.750) - \phi_\infty(1) = 93.749$ é muito grande, enquanto que, correspondentemente à norma $\phi_5(93.750) - \phi_5(1)$ será bem pequena. Ou seja, os números 93.750 e 1 estão bem próximo segundo a norma ϕ_5, com $p = 5$.

Um raciocínio semelhante pode ser empregado quando fazermos $p = 3 \therefore \phi_3\left(\frac{m}{n}\right) = 3^{-k}$ e, notarmos que $\phi_3(3^n) = \phi_3\left(\frac{3^n}{1}\right) = \phi_3\left(3^n\frac{1}{1}\right) = 3^{-n} = \frac{1}{3^n}$. Por conseguinte, podemos verificar que $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = 0$ segundo a norma ϕ_3 e, além disso, verificamos que: $3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n = \frac{1-3^n}{1-3} \overset{n\to\infty}{=} \frac{1-0}{1-3} = -\frac{1}{2}$. "Significa que a série que apareceu a propósito da resolução da equação $x = 1 + 3x$ é convergente na norma ϕ_3. E mais, converge para $-\frac{1}{2}$" (OLIVEIRA, 2009, p. 9). Cabe observar que ϕ_∞ corresponde com a norma usual e ordinária que costumamos empregar no conjunto dos racionais e que, mediante o caso anterior, não converge.

De um modo mais geral, podemos observar o comportamento, por exemplo, da expressão $\ldots 11111111 = 1 + p + p^2 + \cdots + p^n + \cdots = \frac{1}{1-p}, |p|_p = \frac{1}{p}$ (CUOCO, 1991, p. 357). Todavia, quando mudarmos a norma e, portanto, determinamos outro comportamento de convergência para a série geométrica, encontraremos outros resultados.

Dessa forma, nosso problema inicial está resolvido. Observamos que o tratamento de série divergentes, segundo a métrica adotada, pode proporcionar uma percepção que contraria nossa tácita intuição matemática. Para exemplificar, na figura 4 observamos um arqueiro que atira uma flecha que percorre 1 metro, no primeiro segundo, 10 metros no segundo, 100 metros, no terceiro segundo e, assim, sucessivamente. Depois de atirar a flecha, o arqueiro se vira para o lado oposto e, de modo surpreende, a flecha surge do infinito e, após percorrer $-\frac{1}{9}$ irá acertar precisamente o arqueiro no peito. Tal exemplo fornecido por Delahaye (2001) busca significar o sentido matemático contra intuitivo das séries divergentes (ver figura 4) e deriva da soma infinita $1 + 10 + 100 + 1000 + \cdots + \cdots = -\frac{1}{9}$.

Todavia, podemos ainda explorar outras noções intuitivas envolvendo os números p-ádicos, com origem em um pensamento analógico, a partir de outras entidades numéricas conhecidas por nós. De fato, é bastante conhecida a construção dos números reais a partir da noção de cortes, nesse sentido, recordamos o método devido a Richard Dedekind e o método mais geral proposto por Cantor. Não vamos fornecer um detalhamento maior, entretanto, sabemos que existem sequências de números racionais que não convergem para um número racional (ver figura 2) e, em um sentido matemático intuitivo, inclusive adotado por Richard Dedekind (1831 – 1916) e que concorreu para várias críticas para a noção de corte de Dedekind, constatamos que o conjunto dos números racionais Q possuem lacunas ou "buracos" (*gaps*). (EHRLICH, 2006; LAGES, 2010; MASIAS, 2011; KATOK, 2007).

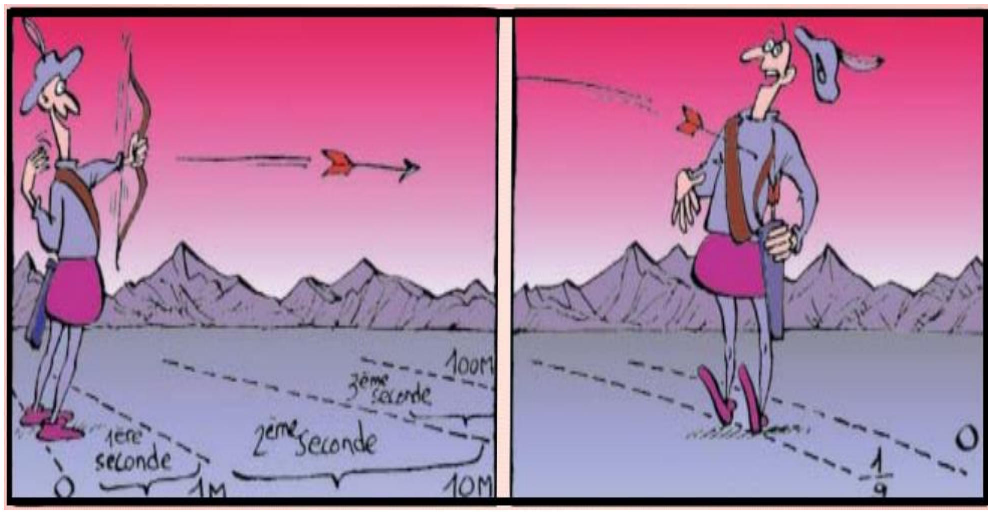

Figura 4. Delahaye (2001, p. 100) fornece um cenário empírico a fim de comunicar o sentido de divergência da série 1+10+100+1000+10000+1000000+⋯

Por outro lado, a fim de completar tais “lacunas” ou “buracos”, podemos garantir que qualquer sequência de racionais $x = (x_n)$ converge para um ponto deste conjunto de contém Q. Em Matemática, tal processo é denominado de completamento do conjunto Q com respeito a determinado valor absoluto. Nesse caso, nos referimos ao método empregado por Georg Cantor (1845 – 1918) que explorou a noção de sequências fundamentais, desenvolveu determinadas relações de equivalências compatível com operações de soma e do produto de sequências fundamentais. Assim, “devido a estas propriedades, as classes de equivalência podem somar-se e multiplicar-se, obtendo-se um corpo. Não entraremos em mais pormenores, diremos só que o que se obtém é o corpo dos números reais” (OLIVEIRA, 2009, p. 10).

Burger (2000) desenvolve uma perspectiva comparativa interessante, na medida em que a métrica usual canônica dos racionais ϕ_∞ se apresenta algo como extremamente naturalizado e padrão que não nos questionamos sobre a possibilidade de medir distâncias e compreender, assim, a proximidade dos elementos a partir de outras normas e de outros valores absolutos. Nesse sentido, comenta que:

> “*Notemos que um número racional é p adicamente grande se o mesmo possui uma grande quantidade de fatores da potência de ‘p’ no seu denominador, e pequena quantidade de seus fatores e potências no seu numerador. Dois racionais estão próximos neste novo sentido se o seu numerador e sua diferença possui potência como fator. De fato, se consideramos apenas os inteiros, o que vemos é que a valorização p-ádica é equivalente a determinadas congruências. Em particular, dois inteiros*

> *são p adicamente próximos se, e somente se, eles são congruentes entre si, pelo módulo da potência do fator primo p*". (BURGER, 2000, p. 107)

Antes finalizarmos a seção atual, para exemplificar um argumento heurístico e intuitivo envolvendo os números p-ádicos, vamos considerar um exemplo interessante fornecido por Gouvêa (1999, p. 10 – 11), quando toma o número racional particular $\frac{24}{17}$ e, facilmente, verificamos que, para o número primo escolhido $p = 3$ podemos escrever as decomposições para cada inteiro presente na fração que correspondem a 24 e 17: $24 = 0 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 = 2p + 2p^2$ e $17 = 2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2 = 2 + 2p + p^2$.

Assim, o autor toma a fração $\frac{24}{17} = \frac{2p+2p^2}{2+2p+p^2}$ e, segundo Gouvêa (1999, p. 12) teremos que: $\frac{24}{17} = \frac{2p+2p^2}{2+2p+p^2} = p + p^3 + 2p^5 + p^7 + p^8 + 2p^9 + \cdots$. De modo engenhoso o autor não descreve, pormenorizadamente, a verificação precisa de tal ilação.

Com efeito, o autor observa que, realizando a seguinte multiplicação dos termos que indicamos $(2 + 2p + p^2)(p + p^3 + 2p^5 + p^7 + p^8 + 2p^9 + \cdots)$ podemos comprovar a igualdade indicada anteriormente. Nesse sentido, podemos observar ainda que: $= 2p + 2p^2 + p^3 + 2p^3 + 2p^4 + p^5 + 4p^5 + 4p^6 + 2p^7 + 2p^7 + 2p^8 + 2p^8 + p^9 + 2p^9 + 4p^9 + \cdots$.
Gouvêa (1999, p. 11) agrupa os seguintes termos que indica $p^3 + 2p^3 = 3p^3 = p^4$ e, sucessivamente, o autor considera a soma sucessiva $p^5 + p^5 + 4p^5 = 6p^5 = 2p^7$ e a outra soma $2p^7 + 2p^7 + 2p^7 = 6p^7 = 2p^8$ e, em seguida, mais uma outra soma das demais potências $2p^8 + 2p^8 + 2p^8 = 6p^8 = 2p^8$ e, etc. Neste ponto, sem muitos detalhes ou pormenores, Gouvêa (1999, p. 11) argumenta, a partir de um viés intuitivo que, assim, as potências de $p$devem ir desaparecendo, progressivamente, do lado direito, conduzido nos até a expressão indicada por $2p + 2p^2 = 24$!. "O leitor pode sentir, provavelmente, que algo foi demonstrado, de forma pouco cuidadosa, todavia, de fato, existe algo a ser provado aqui. Porém, o ponto é que, ao menos formalmente, isto funciona!" (GOUVÊA, 1999, p. 11).

Um pouco mais adiante, Gouvêa explica o método heurístico anterior empregado, afim de determinar a desenvolvimento local e determinadas operações 'infinitas' com séries de potências de números primos, como divisamos abaixo.

> *"Levando em consideração que podemos considerar todo o processo formalmente, se mostra fácil verificar que isto sempre funciona, e os resultados para séries refletem propriedades dos números racionais $x = \frac{a}{b}$levando-se em consideração um número p primo (e será considerado como localmente próximo de p e ou igualmente perto de p, enfatizando a analogia). Assim, para cada primo p, poderemos escrever um número racional $\frac{a}{b}$ na seguinte forma $x = \frac{a}{b} = \sum_{n \geq n_0}^{\infty} a_n \, p^n$. [...] Mantendo isto em mente, que estamos trabalhando formalmente, e com um pouco de imaginação, não se torna difícil de fazer"*. (GOUVÊA, 1999, p. 11 - 12)

Em um sentido semelhante, Holly (2001) assinala determinados expedientes que recorrentemente empregamos, tendo em vista a visualização de determinadas entidades numéricas usuais e não usuais. Todavia, quando lidamos com espaços não arquimedianos ou ultra-métricos, como o caso corpo de frações dos inteiros p-ádicos, que indicamos por Q_p, deparamos outras noções e propriedades substancialmente poucos intuitivas (NARICI; BECKENSTEIN, 1981) correspondentes com a noção de distância e, assim, com natureza intrinsecamente topológica. Nesse sentido, Holly (2001) acentua que:

> "O corpo Q_p *dos números p-ádicos representam um desafio particular para a intuição. O mesmo constitui uma extensão para* Q, *assim, o expediente consiste em imaginar primeiro* Q *como um subconjunto da linha reta. Todavia, isto torna a vida difícil quanto buscamos acrescentar pontos adicionais de* Q_p *por que a distância p-ádica não produz relações com a distância na reta. Assim, é necessário iniciar de um esboço ou desenho e descrever uma figura correspondente para o conjunto* Q_p*."* (HOLLY, 2001, p. 722)

Holly (2001, p. 721) observa que podemos imaginar o espaço ultramétrico possuindo seus pontos e linhas no plano e "não podemos apelar para a nossa usual intuição sobre distância". Dessa forma, se torna necessário apelar para novas formas de representação para o mesmo, bem como, diferentes figuras, como os diagramas em árvore que são explorados pela autora para representar, por exemplo, os inteiros, como um espaço ultramético, com a métrica 3-ádica (CROMPTON, 2007).

Isso posto, na seção subsequente, introduziremos alguns argumentos matemáticos formais necessários para a elaboração de um entendimento melhor estruturado sobre os números p-ádicos e que auxiliam a compreensão da necessária mudança conceitual e interpretativa sobre os mesmos. Nossa opção dar-se-á por enfatizar determinados elementos de ordem topológica e que, portanto, revelam seu vigor epistemológico indene e propenso ao progresso matemático irrefreável.

Alguns aspectos matemáticos (topológicos) sobre os números p-ádicos

Na seção anterior buscamos assinalar determinados aspectos intuitivos que, por vezes, podem ser distinguidos por intermédio das escolhas dos métodos empregados ou, por exemplo, quando buscamos visualizar e comparar as propriedades dos números p-ádicos com os conjuntos ordinários clássicos que nos acostumamos a considerar. Doravante, vejamos alguns elementos de ordem topológica. Nesse sentido, Hasse (1980) compara os comportamento de convergência correspondentes a cada um dos valores absolutos possíveis definidos sobre o corpo dos racionais abaixo.

> "*E é claro, pensando em enfatizar isto em nosso propósito, que séries infinitas p-ádicas não podem ser compreendidas no sentido da convergência com respeito ao valor absoluto ordinário* $|q|_\infty$ *porém, no*

> *sentido da convergência com respeito a valorização $|q|_p$. No senso ordinário, no fato de que todas as séries p-ádicas são obviamente divergentes a menos que limitadas".* (HASSE, 1980, p. 146)

Por sua vez, Natarajan e Ranganathan (2000) emprega um expediente metafórico e intuitivo para explicar propriedades geométricas e topológicas originadas de métricas e propriedades arquimedianas e, sobretudo, quando lidamos com corpos não arquimedianos, como no caso dos números p-ádicos. Nesse sentido, Natarajan e Ranganathan (2000) instigam o leitor para imaginar o seguinte cenário:

> "*Imagine uma pequena tartaruga-pigmeu tentando viajar por um caminho muito longo; suponha que o seu destino esteja a uma distância muito longa do seu ponto de partida. Se a cada passo a tartaruga pigmeu cobrir uma pequena distância, pode chegar ao seu destino? (Suponha que a tartaruga tenha vida infinita!): Nosso senso comum diz "sim"; 'sim', é um dos axiomas importantes na Geometria Euclidiana que qualquer grande segmento em uma linha reta pode ser coberto pela adição sucessiva de pequenos segmentos ao longo da mesma linha" Equivalentemente diz que, dado qualquer número M> 0, há existe um inteiro N tal que N> M. Isto é conhecido como o axioma de Arquimedes do campo de número real. O que acontece se não tivermos esse axioma? Podemos ter campos que não sejam arquimedianos?*" (NATARAJAN E RANGANATHAN, 2000, p. 32).

Vejamos, agora, algumas definições matemáticas formais e algumas propriedades importantes visando a compreensão matemática do nosso objeto matemático.

Definição 1: Fixado um número primo p, uma valorização p-ádica sobre os números inteiros é uma função $v_p: Z - \{0\} \to IR$ definida para cada inteiro $n \neq 0$, temos que $v_p(n)$ é o único inteiro positivo satisfazendo $n = p^{v_p(n)} \cdot n'$ e p não divide n'. A referida função pode apresentar um domínio ampliado ao campo dos racionais, se $x = \frac{a}{b}$, então $v_p(x) = v_p(a) - v_p(b)$; $v_p(0) = +\infty$. (GOUVÊA, 1999, p. 23).

A partir dessa definição anterior, Gouvêa (1999, p. 23) comenta que é fácil obter que, para todo número racional $x \in Q - \{0\}$ podemos escrever $x = p^{v_p(x)} \cdot \frac{a}{b}$, de forma que o número primo p não divide o produto $a \cdot b$. Um pouco mais adiante, Gouvêa (1999) comenta a propriedade que indicamos na proposição 1 seguinte.

Proposição 1: A valorização p-ádica $v_p: Z - \{0\} \to IR$ é independente da representação do quociente dos inteiros utilizados, quer seja na forma irredutível ou com o uso de representações equivalentes.

Prova. Sejam $a, b, c, d \in Z^*$ e verifiquemos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \to v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p\left(\frac{c}{d}\right)$. De fato, se ocorrer que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$. Assim, vemos que $a \cdot d = b \cdot c = x \in Z$. Dessa forma, teremos ainda $v_p(ad) = v_p(bc) \rightarrow v_p(a) + v_p(d) = v_p(b) + v_p(c)$ e, ainda, reescreveremos da seguinte forma $v_p(a) - v_p(b) = v_p(c) - v_p(d)$ e, por definição, determinamos imediatamente a igualdade seguinte $v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p\left(\frac{c}{d}\right)$ c.q.d.

Proposição 2: A valorização p-ádica de um racional $x \in Q$ é descrita da seguinte forma $x = p^{v_p(x)} \cdot \frac{a}{b}$, com um primo p, que não divide o produto $(a \cdot b)$.

Prova. De fato, dado um número primo p, seja $x = \frac{c}{d}$ e se p não é fator primo nem de c e nem de d, então $v_p(x) = 0$ e $p^0 \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = x$. Vamos escolher p^{α_1} a maior potência na decomposição de c em fatores primos e p^{α_2} a maior potência na decomposição de d em fatores primos. Assim, podemos escrever o seguinte: $c = p^{\alpha_1} \cdot a$ e $d = p^{\alpha_1} \cdot b$. Segue que: $x = \frac{c}{d} = \frac{p^{\alpha_1} \cdot a}{p^{\alpha_2} \cdot b} = p^{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \frac{a}{b}$. Mas, tendo em vista que $\alpha_1 - \alpha_2 = v_p\left(\frac{c}{d}\right) = v_p(x)$, isto é, determinamos que $x = p^{v_p(x)} \cdot \frac{a}{b}$. Ademais, o fato de que p^{α_1}e p^{α_2} representam as maiores potências do primo p respectivamente dos fatores c e d, nos garante que o número primo p não divide o produto $a \cdot b$ (portanto nenhum dos seus fatores). c.q.d.

A proposição 3 proporcionará, logo em seguida, derivar e verificar determinadas desigualdades importantes envolvendo a norma p-ádica definida mais adiante.

Proposição 3: Para quaisquer racionais $x, y \in Q$, temos:

(a) $v_p(x \cdot y) = v_p(x) + v_p(y)$; $v_p(x + y) \geq min\{v_p(x), v_p(y)\}$, com a condição ou convenção de que $v_p(0) = +\infty$. (GOUVÊA, 1999, p. 23).

Prova. (a) Sejam $a, b, c, d \in Z^*$ podemos escrever $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$ e, assim, escrevemos $v_p(x \cdot y) = v_p\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = v_p\left(\frac{ac}{bd}\right) = v_p(ac) - v_p(bd)$. Mas, sabemos ainda que valem as seguintes relações $v_p(a \cdot c) = v_p(a) + v_p(c)$ e $v_p(b \cdot d) = v_p(b) + v_p(d)$. Por conseguinte, teremos que: $\begin{cases} v_p(ac) - v_p(bd) = v_p(a) + v_p(c) - [v_p(b) + v_p(d)] \\ v_p(ac) - v_p(bd) = v_p(a) + v_p(c) - v_p(b) - v_p(d) \\ v_p(ac) - v_p(bd) = v_p(a) - v_p(b) + v_p(c) - v_p(d) \end{cases}$.

Segue que $v_p(ac) - v_p(bd) = v_p(a) - v_p(b) + v_p(c) - v_p(d) = v_p\left(\frac{a}{b}\right) + v_p\left(\frac{c}{d}\right)$. Finalmente, teremos $v_p(x \cdot y) = v_p(ac) - v_p(bd) = v_p\left(\frac{a}{b}\right) + v_p\left(\frac{c}{d}\right) = v_p(x) + v_p(y)$. Para o item (b), vamos considerar a seguinte descrição $x = p^r \cdot \frac{a}{b}$ e $y = p^s \cdot \frac{c}{d}$, onde $a, b, c, d \in Z$, de forma que o primo p não divide nenhum dos termos $a, b, c, d \in Z$ (*) e os expoentes inteiros $r, s \in Z$. Temos dois casos a considerar: se $r = s$ ou $r \neq s$. Se tivermos que $r = s$ podemos escrever $x + y = p^r \cdot \frac{a}{b} + p^r \cdot \frac{c}{d} = p^r \cdot \left(\frac{ad+bc}{bd}\right)$. Assim, observando que p não divide nenhum dos termos b e d que poderiam diminuir o expoente indicado por p^r. Por definição, teremos $v_p(x + y) \geq r = min\{v_p(x), v_p(y)\}$. No segundo caso, teremos a soma $(x + y) = \left(p^r \cdot \frac{a}{b} + p^s \cdot \frac{c}{d}\right) = p^r \cdot \left(\frac{a}{b} + p^{s-r} \cdot \frac{c}{d}\right)$ e admitiremos, sem perda de generalidade, que lidamos com a condição $s - r > 0$ ou $s > r$ e o número primo p não divide nenhum dos termos b e d. Reparemos, também, que p não pode dividir o termo no numerador $x + y = p^r \cdot \left(\frac{ad+p^{s-r}bc}{bd}\right)$, pois, caso contrário, isto é, se ocorre $p\backslash ad + p^{s-r}bc$ e, naturalmente, teríamos que $p\backslash p^{s-r}bc$. Assim, implicaria que $p\backslash ad$ uma contradição por (*). Dessa forma, teremos que $v_p(x + y) \geq r = min\{v_p(x), v_p(y)\}$, para a condição $v_p(x) = r < s = v_p(y)$. c.q.d.

Cabe observar que a definição 2 seguinte foi introduzida em 1907 por K. Hensel (NARICI E BECKENSTEIN, 1981, p. 668) e que motivou ao matemático ucraniano József Kürschak (1864 – 1933) buscar sua generalização. Steuding (2002, p. 92) recorda que, de modo especial, para valores absolutos definidos sobre os racionais, "temos para um número racional x que $|x|_p$ é pequeno se, e somente se, $|x|_p \Leftrightarrow$ for divisível por uma grande potência do primo p. Esta foi a ideia introduzida por K. Hensel na introdução dos números p-ádicos".

Definição 2: Fixado um número primo p, nós introduzimos a norma $|x|_p$ a partir da seguinte regra $\begin{cases} |0|_p = 0 \\ |x|_p = p^{-v(x)} = \frac{1}{p^{v(x)}} \end{cases}$, aonde v_p é a valorização p-ádica.

Por exemplo, vejamos que $|6|_3 = |3^1 \cdot 2|_3 = 3^{-1} = \frac{1}{3} = |3^1 \cdot 5|_3 = |15|_3$. Ou ainda, temos que $\left|\frac{1}{4}\right|_2 = \left|2^0 \cdot \frac{1}{4}\right|_2 = 3^{-1}$. Seguem, de imediato, as propriedades do teorema 1.

Teorema 1: A função $|\ \ |_p$ é um valor absoluto não arquimediano em $|x|_p$.

Comentário. Afim de verificar que se trata de um valor absoluto não arquimediano, vamos mostrar que três itens (propriedades formais) devem ocorrer: (i) $|x|_p = 0 \leftrightarrow x = 0$; (ii) $|x \cdot y|_p = |x|_p|y|_p, \forall x, y \in Q$; (iii) $|x + y|_p \leq max\{|x|_p, |y|_p\}, \forall x, y \in Q$.

Prova. Vejamos que se $|x|_p = p^{-v(x)} = 0 \leftrightarrow x = 0$. No segundo item, sabemos que vale $v_p(x \cdot y) = v_p(x) + v_p(y)$ e, por definição, temos que $|x \cdot y|_p = p^{-v_p(x \cdot y)}$. Dessa forma, segue que: $|x \cdot y|_p = p^{-v_p(x \cdot y)} = \frac{1}{p^{v_p(x \cdot y)}} = \frac{1}{p^{v_p(x)+v_p(y)}} \overset{prop3}{=} \frac{1}{p^{v_p(x)} \cdot p^{v_p(y)}} = \frac{1}{p^{v_p(x)}} \frac{1}{p^{v_p(y)}} =$ $= p^{-v_p(x)} \cdot p^{-v_p(y)} = |x|_p \cdot |y|_p$ e segue o item (ii). Por fim, para verificar que para quaisquer$\forall x, y \in Q$ocorre $|x + y|_p \leq max\{|x|_p, |y|_p\}$, basta notar que $|x + y|_p = \frac{1}{p^{v(x+y)}}$ e, empregar de imediato a proposição 3, recordando que $v_p(x + y) \geq min\{v_p(x), v_p(y)\}$ e que implica, de imediato, que $p^{-v_p(x+y)} \leq p^{-min\{v_p(x), v_p(y)\}}$ e segue o resultado desejado.

Carvalho e Lourenço (2015, 5) comentam que a desigualdade anterior indicada $|x + y|_p \leq max\{|x|_p, |y|_p\}$ corresponde a significar que a norma p-ádica satisfaz uma propriedade mais forte do que a emblemática desigualdade triangular, dita propriedade não arquimediana e que generaliza o fato de p que se uma potência natural divide dois inteiros, então divide sua soma e sua diferença. Vejamos uma consequência imediata.

Proposição 4: As seguintes afirmações são equivalentes sobre a norma $\|\,.\,\|$, definida sobre os racionais.

(i) $\|\,.\,\|$ não arquimediana; (ii) $\|z\| \leq 1$, para todo inteiro $z \in Z$.

Prova. Vamos verificar que (i) implica em (ii). De fato, vamos considerar uma norma $\|\,.\,\|$ definida sobre o corpo dos racionais. De imediato, temos que $\|1\| = 1$, pois lidamos com a positividade da norma e é multiplicativa. Fixado um número natural $n \in IN$ e vamos admitir que $\|k\| \leq 1$, para $k \in \{1,2, \dots, n-1\}$. Então, podemos observar que ocorre ainda que $\|n\| = \|n-1+1\| \leq max\{\|n-1\|, \|1\|\} = 1$. Por indução matemática, segue que então $\|n\| \leq 1$ para todo número natural. Ademais, de imediato, temos que $\|0\| = 0 \leq 1$ e que $\|-n\| = \|n\|$ e, assim, segue o resultado para todo inteiro. Reciprocamente, dados os racionais $x, y \in Q$ e $k \in IN$, por intermédio da propriedade multiplicativa de uma norma e assumindo que vale o item (ii), teremos que: $\|x+y\|^k = \|(x+y)^k\| = \left\|\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j \cdot y^{k-j}\right\| \leq \sum_{j=0}^{k} \left\|\binom{k}{j}\right\| \cdot \|x\|^j \cdot \|y\|^{k-j} \overset{hipótese}{\leq} \sum_{j=0}^{k} 1 \cdot \|x\|^j \cdot \|y\|^{k-j} \leq (k+1)(max\{\|x\|, \|y\|\})^k$. Por fim, basta ver agora que $\|x+y\|^k \leq (k+1)(max\{\|x\|, \|y\|\})^k$ ou, ainda, poderemos escrever da seguinte forma $\|x+y\| \leq \sqrt[k+1]{k+1}(max\{\|x\|, \|y\|\})$. Finalmente, tomando $k \to +\infty$ e usando o fato que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k+1]{k+1} = 1$, segue que $\|x+y\| \leq max\{\|x\|, \|y\|\}$. c.q.d.

Vejamos, agora, as afirmações indicadas por Carvalho e Lourenço (2015, p. 6) e que proporcionam uma sensação intuitiva que contraria ao pensamento que costumamos empregar com a métrica ordinária usual e não p-ádica. Para tanto, vamos considerar para cada terno de racionais não nulos $(x, y, x-y)$ por triângulos em Q, com a métrica p-ádica, de lados com comprimento $\|x\|_p, \|y\|_p, \|x-y\|_p$. Se o número racional $a \in Q$ e $\rho > 0$, definimos a bola na métrica p-ádica, centrada no ponto $a \in Q$ e raio $\rho > 0$ pelo seguinte conjunto $B_\rho(a) := \{x \in Q \mid \|x-a\|_p < \rho\}$. A partir dessa definição, vejamos nosso último teorema que revela um pouco da visão topológica dos números p-ádicos.

Teorema 2: (a) todos os triângulos em Q, com a métrica p-ádica, são ISÓSCELES e o comprimento da base não excede o comprimento dos lados; (b) todo o ponto de cada bola é centro da bola ou, equivalentemente, dadas duas quaisquer bolas não-disjuntas, uma delas contém a outra; (c) duas esferas quaisquer, ou sua intersecção e vazia ou uma delas esta contida na outra (NATARAJAN, 2014, p, 6); cada ponto de uma bola $B_\rho(a)$ é o centro da bola de mesmo raio.

Prova. (a) Vamos considerar dois elementos $x, y \in Z$ e tomamos, respectivamente, os termos $v_p(x) = m$ e $v_p(y) = n$, então, vamos considerar: $x = p^m \cdot a, y = p^n \cdot b$ e o número primo p não divide o produto $(a \cdot b)$. Os valores absolutos p-ádicos da forma $\|x\|_p = p^{-m}$ e $\|y\|_p = p^{-n}$. Nesse caso, consideraremos os números $x, y, x+y$. Reparemos que podemos ter que $\|x\|_p > \|y\|_p$ quando ocorrer que $n < m \therefore m = n + q$, onde $q \geq 0$. Vejamos que: $x + y = p^m a + p^n b = p^{n+q} a + p^n b = p^n \cdot p^q \cdot a + p^n \cdot b$

$= p^n(p^q \cdot a + b)$. Agora, vamos observar que o número primo p não divide b e, *a fortiori*, não poderá dividir a expressão $p^q \cdot a + b$. Chegamos, assim, na conclusão de que $v_p(x + y) = n$ e vale $\|x + y\|_p = p^{-n} = \|x\|_p$, isto é, temos dois lados de mesmo comprimento. Mas, se ocorrer ainda a igualdade $\|x\|_p = \|y\|_p$, isto é, se ocorre que $n = m$ e, dessa forma, teremos $x + y = p^m a + p^n b = p^n(a + b)$ e, desde que o número primo p não divide o produto $a \cdot b$ não pode dividir nenhum dos fatores e, nem muito menos sua soma. Por conseguinte, vemos que $v_p(x + y) \geq n = min\{v_p(x), v_p(y)\}$. E, assim, segue que $\|x + y\|_p \leq max\{\|x\|_p. \|y\|_p\} = \|x\|_p = \|y\|_p$. Em todo caso, vemos que $\|x + y\|_p, \|x\|_p, \|y\|_p$ são dois a dois iguais. (b) Consideremos, agora, $a \in Q$ e $\rho > 0$ e a bola na métrica p-ádica, tal que, para todo $b \in B_\rho(a) := \{x \in Q |\ \|x - a\| < \rho\}$, teremos que, para quaisquer elementos $x \in B_\rho(a) := \{x \in Q |\ \|x - a\|_p < \rho\}$ valem as duas condições: $\|b - a\|_p < \rho, \|x - a\|_p < \rho$. Em seguida, iremos mostrar que vale, também, a inclusão $B_\rho(a) \subset B_\rho(b)$. Com efeito, basta observar que:
$\|x - b\|_p = \|x - b - a + a\|_p = \|(x - a) + (a - b)\|_p \leq max\{|x - a|_p, |a - b|_p\} < \rho$.
Isto é, vae que $x \in B_\rho(b) := \{x \in Q |\ \|x - b\|_p < \rho\}$. Dessa forma, mostramos que dadas duas bolas quaisquer, não disjuntas, ocorre que uma contém a outra.

Convidamos ao leitor apreciar outras propriedades (topológicas) inesperadas a respeito dos números p-ádicos em Marcos (2006). Vejamos uma outra propriedade da norma p-ádica e que determina diferentes topologias sobre os racionais (OBERGOSO, 2016, p. 42)

Proposição 4: Fixado um número racional $x \in Q$ e o primos distintos p_1, p_2, então as normas p-ádicas determinadas por cada primo são distintas, isto é, vale que $\|\ \|_{p_1} \neq \|\ \|_{p_2}$
Prova. Fixado um número racional $x \in Q$ e o primos distintos p_1, p_2 e tomaremos o racional $x = \frac{a}{b}$, onde $a, b \in Z$. Se ocorrer que p_1 não divide $x = \frac{a}{b}$ e, da mesma forma, se p_2 não divide $x = \frac{a}{b}$, teremos que $\|x\|_{p_1} = \frac{1}{p_1^0} = \frac{1}{1} = \frac{1}{p_2^0} = \|x\|_{p_2}$. Por outro lado, se ocorrer que $p_1 \backslash x$ ou $p_2 \backslash x$. Nesse caso, podem ocorrer que $\|x\|_{p_1} = \frac{1}{p_1^m}$ ou $\|x\|_{p_2} = \frac{1}{p_2^m}$. Mas, desde que $p_1 \neq p_2 \therefore \frac{1}{{p_1}^m} \neq \frac{1}{{p_2}^n}$. Por fim, segue que $\|\ \|_{p_1} \neq \|\ \|_{p_2}$.

Koblitz (1984, p. 13) explica que "o conjunto de expansões p-ádicas que não envolvem potências negativas do primo p correspondem aos inteiros p-ádicos".

Proposição 5: Fixado um número racional $x \in Q$ e $\|x\|_p \leq 1$ para todo número primo p, então $x \in Z$.
Prova. Dado número racional $x \in Q$, da forma $x = \frac{a}{b}$, com $a, b \in Z$ e $b \neq 0$. Seja p um número primo que p que divida o racional $x = \frac{a}{b}$, isto é, ocorre que $x = p^m \cdot \frac{c}{d}$, de forma que $c, d \in Z$ e $d \neq 0$. Reparemos que, caso não exista tal primo p então ocorrerá que $x = 1$. Vamos assumir que $\|x\|_p \leq 1$. Mas, observamos que na decomposição $x = p^m \cdot \frac{c}{d}$ ocorrerá

$m > 0$ se, e somente se, tivermos que $p \backslash c$ e p não divide d (denominador) ou, ainda, se a potência do primo p que divide o numerador $c$for maior do que a potência de p que divide o denominador d. Em todo caso, teríamos que $x = \frac{p^u \cdot c}{p^v \cdot d} = p^m \frac{c}{d}, u > v, u - v = m > 0$. Por outro lado, observemos que se $b \neq 1$ então, necessariamente, existirá um número primo p, tal que $p^k \backslash b$, com $k > 0, k \in IN$. Não obstante, se ocorrer que $k > u$ segue que $\|x\|_p > 1$ uma contradição. Portanto, deve ocorrer que $b = 1$ e segue o resultado. c.q.d.

Outra propriedade topológica que podemos registrar, visando a obtenção dos números p-ádicos, constitui o método de completamento de um espaço métrico. Nesse sentido, sabemos que "um espaço métrico se diz completo se todas as suas sucessões de Cauchy são convergentes. É o caso de IR com a métrica usual. Pelo contrário, o espaço Q com a mesma métrica não é completo (FERREIRA, 2010). E Q com a métrica $\| \; \|_p$ também não é completo. Há, porém, um procedimento padrão para se completar um espaço métrico" (CARVALHO e LOURENÇO, 2015, p. 7). Nesse sentido, no excerto abaixo, Goldblatt (1998) fornece uma perspectiva importante para o nosso leitor.

> "*Existem várias estruturas matemáticas que são incompletas porque faltam alguns elementos, tais como sequencias de Cauchy, a soma de séries infinitas, a cota superior de conjuntos, pontos no infinito e, segue. Uma variedade de técnicas standard existe para completar tais estruturas pela adição de novos elementos. Agora, o aumento de uma estrutura a partir de um referencial não padrão é um tipo de completamento, e estamos explorando alternativas de completamento para métodos clássicos. Para tal perspectiva, existem alguma redundância no processo de ampliação que satura a estrutura com elementos que não poderíamos imaginar adjuntar à mesma*" (GOLDBLATT, 1998, p. 231).

Na figura 5, Gouvêa (1999) ilustra uma propriedade geométrica derivada das características da norma p-ádica, que envolve a propriedade de que todo triângulo possui dois lados de comprimentos iguais. Tal propriedade se torna importante no completamento dos racionais por intermédio de sequências de Cauchy (KOBLITZ, 1984). Propriedades topológicas como, por exemplo, todas as bolas $B_\rho(a) := \{x \in Q \mid \|x - a\|_p < \rho\}$ são abertas e fechadas ou, ainda, que muitos conjuntos são fechados (*closed*) e abertos (*open*) ao mesmo tempo, o que concorre para o neologismo "*clopen*" empregado por Steuding (2002, p. 93) são verificas em espaços ultramétricos e como explica Natarajan (2014, p. 4). Aqui, estamos lidando com elementos da Análise não arquimediana ou Análise p-ádica ou, ainda, com Análise ultramétrica. Por fim, trazemos um emblemático teorema devido ao matemático russo Alexander Markowich Ostrowski (1893–1986). Observamos, na figura 6, um desenho esquemático que revela outras formas de completamento do conjunto dos números racionais Q. Sugerimos ao leitor consultar os trabalhos (LEWIS, 2019) com o escopo de maiores detalhes relacionados aos demais enunciados.

Teorema 3: Para Q_p valem as seguintes propriedades.
a) Os racionais são densos em Q_p; b) Para todo $\rho > 0$, para cada bola $B_\rho(a) = \{x \in Q_p \mid \|x - a\| < \rho\}$ é um conjunto aberto e fechado; c) A família de todas as bolas em Q_p é enumerável; d) O conjunto dos inteiros p-ádicos, definido por $Z_\rho = \{x \in Q_p \mid \|x\| < 1\}$ é um conjunto compacto; e) IN é denso em Z_p.
Prova. Recomendamos ao leitor consultar Steuding (2002) ou Borevich e Shafarevich (1966) visando um exame de maiores pormenores que extrapolam os limites do presente trabalho.

Por último, vejamos o teorema devido ao matemático ucraniano Alexander Markowich Ostrowski (1893 – 1986) (ver figura 3, lado direito). Gautschi (2002) recorda que o matemático russo foi docente na universidade de Kiev e que contribuiu em vários ramos na pesquisa avançada em Matemática Pura.

Teorema (**de Ostrowski**): Todo valor absoluto não trivial definido nos corpos dos racionais é equivalente a um dos valores absolutos $\| \ \|_p$ ou $\| \ \|_\infty$.
Prova. Para mais detalhes, sugerimos ao leitor consultar Natarajan (2014), Koblitz (1984), Amice (1975) ou Ostrowski (1916).

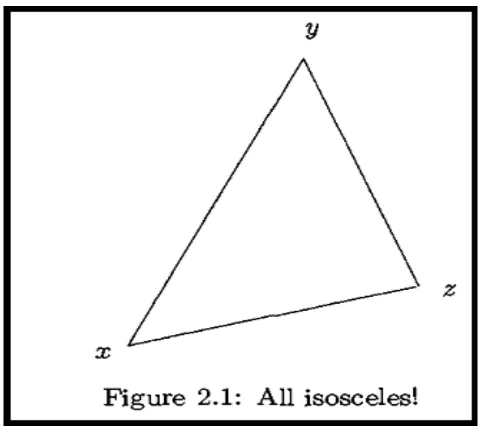

Figura 5. Gouvêa (1999, p. 34) assinala que este resultado memorável concorre para grandes resultados mais adiante na teoria dos espaços ultramétricos.

Na figura 6 Neukirch (1990) comenta o processo de complemento dos racionais com as normas $\| \ \|_p$ ou $\| \ \|_\infty$ e que conduzem aos números p-ádicos e aos números reais, respectivamente. O autor observa que, em todos os completamento, divisamos o conjunto dos números racionais como um subconjunto próprio das infinitas entidades conceituais que divisamos na figura abaixo. Neukirch (1990, p. 209) comenta que “se conhecemos todos os valores p-ádicos de um número racional conheceremos todos os seus valores absolutos”. Tal argumento envolve uma reformulação de um fato trivial de que, a partir da fatorização de todos os seus fatores primos, no numerador e no denominador, poderemos conhecer e determinar o valor absoluto de um número racional. “Todavia, existe ainda outros elementos a considerar” (NEUKIRCH, 1990, p. 209). Como explica este autor, “os números racionais constituem uma preocupação primária, todavia, são complicados de lidar do ponto de vista aritmético e, IR e Q_p são mais fáceis” (NEUKIRCH, 1990, p. 209).

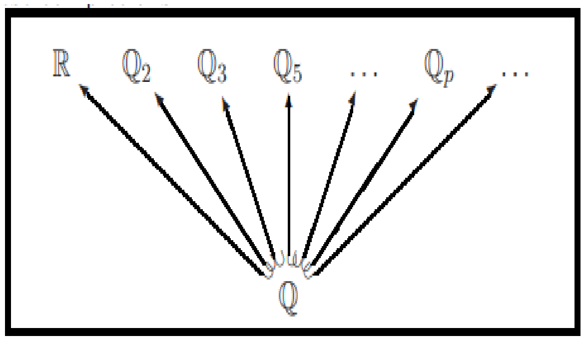

Figura 6. Neukirch (1990, p. 207) explica o processo de construção dos números p-ádicos com o uso da norma p-ádica e a obtenção de outros completamentos dos racionais

Na figura 7 divisamos uma outra representação figural que pode inspirar o leitor no entendimento sobre a existência de infinitos completamentos (e extensões independentes) para o corpo dos números racionais, a partir do emprego correspondente da norma p-ádica $\| \ \|_p$ ou da norma do infinito usual $\| \ \|_\infty$, para todo número primo $p \in IN$.

$$\boxed{\mathbb{Q}_2,\ \mathbb{Q}_3,\ \mathbb{Q}_5,\ \mathbb{Q}_7,\ \mathbb{Q}_{11}, \ldots, \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}.}$$

Figura 7. Neukirch (1990, p. 169) explica o processo infinito de obtenção de extensões do corpo dos racionais, para cada número primo ‘p’.

Finalmente, desde que buscamos acentuar um entendimento epistemológico e, portanto, matemático evolutivo a respeito dos números p-ádicos, dessa forma, precisamos compreender as repercussões atuais e os indicativos futuros envolvendo seu campo de aplicação e desenvolvimento, não apenas do ponto de vista endógeno, mas, também, em um cenário ampliado de pesquisa em Ciências e Tecnologia (AÇIKGÖZ e ASLAN, 2009;

BELAIR, 2012; CROMPTON, 2007; GUSMÃO, 2016; HUAMAN, 2015; KHRENNIKOV e KOTOVICHM, 2017; SILVERMANM, 2013). Nesse sentido, resgatamos uma ponderação de Khrennikov e Kotovich (2017, p. 150) que nos autoriza em falar, em algum tempo, “em métodos de p-aprendizagem, ou p-interatividade, p-adaptação a determinadas classes de imagens”. Um pouco mais adiante, Pitkänne (2015) acrescenta uma perspectiva semelhante, quando pondera elementos de ordem cognitiva:

> “*Como uma interpretação óbvia para as soluções de equações em corpos p-ádicos é fácil uma correlação geométrica de imaginação. Plantas, intenções, expectativas, sonhos e cognição em geral são perspectivadas possui membranas de um espaço tempo p-ádico e suas correlações geométricas. Um profundo princípio parece estar envolvido: incompletude é uma característica da física p-ádica, todavia, a flexibilidade tornar próximo, por intermédio desta incompletude que é absolutamente essencial para a imaginação e o processo de consciência cognitiva de modo geral*”. (PITKÄNEN, 2015, p. 354).

O ponto de vista assumido por Pitkänen (2015) inspira uma perspectiva de que nossa imaginação e cognição possam ser e adquirir por outros elementos determinantes para a compreensão da essencialidade do meio em que vivemos. Nesse sentido, para ilustrar, a visualização ou configurações p-ádicas, como divisamos na figura 8, produzida por Cuoco (1991) confirmam a possibilidade do acréscimo de determinados elementos para nossa faculdade intuitiva. O método de Cuoco (1991) permite realizar uma imersão tanto de Z_p e Q_p como subconjuntos do espaço IR^2 e, assim, visualizar e inferir determinadas topológicas importantes. Sua abordagem admite profundas interfaces com disposições fractais que, em recentes estudos, permitem vislumbra um universo de novas aplicações dos números p-ádicos (CORNELISSEN; KATO, 2005; HUAMAN, 2015; LAPIDUS; HUNG, 2008; SCHLICHENMAIER, 2007; REDDY; SHANKARAIAH, 2013).

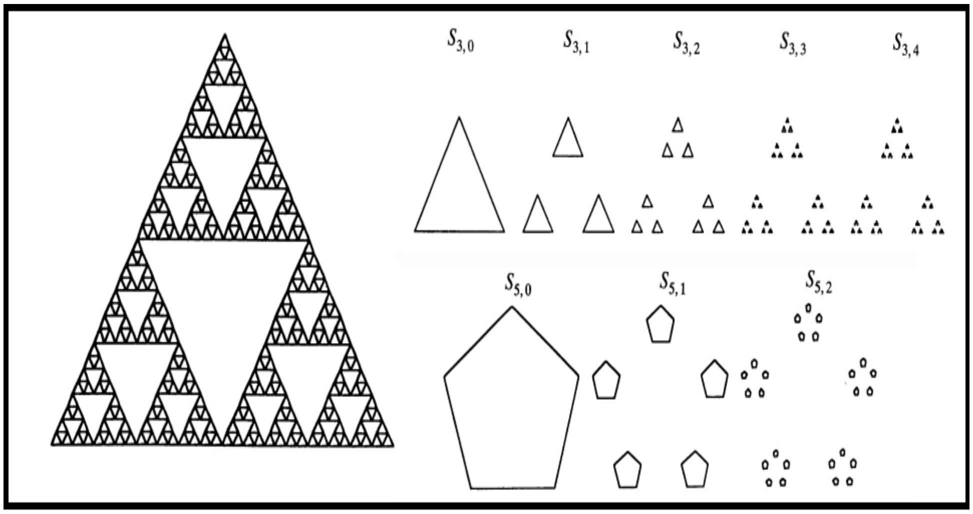

Figura 8. Cuoco (1991) propõe um método de representação geométrica de números p-ádicos com disposições fractais e subconjunto do plano.

Considerações finais

Na seção anterior buscamos assinalar determinados aspectos intuitivos que, por vezes, podem ser distinguidos por intermédio das escolhas dos métodos matemáticos empregados ou, por exemplo, quando buscamos visualizar e comparar as propriedades dos números p-ádicos com os conjuntos ordinários clássicos que nos acostumamos a considerar e que afetam nossos sentidos. Dessa forma, uma maior compreensão sobre tais objetos pode proporcionar um aperfeiçoamento de nossa visão sobre a própria Matemática, com origem em elementos históricos e, sobretudo, matemáticos e epistemológicos - evolutivos (ALVES, 2017; ALVES & CATARINO, 2022; GUSMÃO, 2016) .

Não obstante, "esta teoria é pouco ensinada, mesmo que permita uma abertura para um mundo de números com propriedades estranhas e que podemos utilizá-la em classes no colégio e nas universidade para provar para os alunos que a Matemática é um universo de fadas" (DELAHAYE, 2001, p. 102). Por conseguinte, propugnamos um caráter de importância visando uma maior divulgação, seu conhecimento, a discussão, o exame e a apreciação necessária de determinados fatores de ordem histórica, de ordem matemática e de ordem epistemológica, mediante o modo pelo qual buscamos apresentar ao leitor nas seções predecessoras, apesar de que, não ensejamos exaurir o assunto e as inúmeras repercussões para pesquisa especializada tanto em Matemática, como em outros campos disciplinares (KUMAR; RANI; CHUGH; 2013).

Como assinalamos em nossos trabalhos, uma compreensão histórica fundamentada em elementos de gênese endógena e exógena, com forte impregnação epistemológica, se mostra visceralmente condicionada e determinada pelo avanço sistemático dos modelos, dos métodos matemáticos e padrões científicos assumidos, tendo em vista o progresso irrefreável de determinado objeto conceitual ou teoria matemática concorrendo (ALVES & CATARINO, 2022), assim, para uma melhor entendimento sobre o conhecimento científico. Em nosso caso, os traços e informações coligidas nas seções anteriores sobre os números p-ádicos podem fornecer ao leitor outro exemplo do caráter não estático do conhecimento matemático.

Para concluir, Hasse (1980, p. 146) recorda que "Hensel construiu os números p-ádicos com representações em series descritas de uma maneira similar com a construção dos números reais como frações decimais". Por conseguinte, não podemos desconsiderar uma perspectiva epistemológica característica do pensamento matemático, tendo em vista a constituição de novos modelos teóricos para objetos que representam a generalização de outras entidades conceituais já conhecidas. Não obstante, na medida em que preservam aspectos importantes capazes de impulsionar toda uma teoria ou ramo de pesquisa, de forma independente, por vezes, evidenciam dessemelhanças e que descortinam outros itinerários evolutivos inusitados.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio para o desenvolvimento dessa pesquisa, com processo e projeto de nº 305495/2022-4 e financiamento pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq.

Bibliografia

ALVES, Francisco, R. V. (2017). Fórmula de de moivre, ou de binet ou de lamé: demonstrações e generalidades sobre a sequência generalizada de fibonacci – SGF. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v, 17, nº 33, 1–16.

ALVES, Francisco, R. V.; CATARINO, P. M. (2022). A sequência de Padovan ou de Coordonier. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 22, nº 45, 21–43.

AMICE, Ivete. (1975). *Le nombres p-adique*. Paris: Presses Universitaire. Disponível em: <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~panchish/GDL16/amice_les-nombres-padiques%20%5B2755599%5D.pdf>.

AÇIKGÖZ, Mehmet; ASLAN,Nurgül; Köşkeroğlu, Nurten e Aracı, Serkan. (2009). p-Adic Approach to Linear 2-Normed Spaces. *Mathematica Moravica*, v. 13, nº 2, 7−21. Disponível em: <http://scindeks-clanci.ceon.rs/data/pdf/1450-5932/2009/1450-59320902007A.pdf>.

ADERBURG, Drew. (2002). A Mathematical Seduction. *Math Horizons*, 9:3, 12–15. Disponível em: <https://web.williams.edu/Mathematics/eburger/BurgerMathHorizons.pdf>.

BELAIR, Luc. (2012). Panorama of p-adic model theory, *Annales des Sciences Mathematiques du Quebec*, nº 36, p. 43−75, 2012. Disponível em: <http://www.logique.jussieu.fr/modnet/Publications/Introductory%20Notes%20and%20surveys/Belair.pdf>.

BOREVICH, Z. I.; SHAFAREVICH, I. R. (1966). *Number Theory*. New York: Academic Press.

BURGER, Edward, B. (2000). *Exploring the number jungle: a journey into diophantine analysis*. New York: Americal Mathematical Society.

CĂLIN, Mureşan Alexe. (2006). Non-Archimedian Fields. Topological Properties of Zp, Qp (p-adics Numbers). *Matematică - Informatică – Fizică*, v. 63, nº 2, 43–48. Disponível em: <http://bmif.unde.ro/docs/20062/7%20MuresanA.pdf>.

CARVALHO, Maria Pires de; LOURENÇO, João Nuno P. (2015). Convergência de séries p-ádicas. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 1 – 30, Disponível em: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/90725/2/104694.pdf>.

CHINEA, C. (2000). Matemática. ¿qué son los números p-adicos?. carlos s. chinea, octubr. Divulgación de la matemática en la red. 1–5. Disponível em: <https://casanchi.com/casanchi_2000/19_padicos01.pdf>.

CORNELISSEN, Gunther; KATO, Fumiharu. (2005). The p-adic icosaedron. Notes in *American Mathematical Association - AMS*. v. 52, nº 7, 720–727. Disponível em: <https://www.ams.org/notices/200507/fea-cornelissen.pdf>.

COHEN, Henri. (2007). *Number Theory Volume I: Tools and Diophantine Equations*. New York: Springer.

CORRY, Leo. (2004). *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Basel and Boston, Birkhäuser.

CUOCO, Albert. A. Visualizing the p-adic integers. *American Mathematical Monthly*. v. 98, nº 4, 355–364. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/pdf/2323809.pdf?refreqid=excelsior%3Ada3401d345ac7e62ccac8f6378fb2cfc>.

CROMPTON, Catherine (2007) Some Geometry of the p-adic rationals. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*: v. 8 : Iss. 1 , Article 2. 1–13. Disponível em: <https://scholar.rose-hulman.edu/cgi/viewcontent.cgi?referer=https://www.google.com.br/&httpsredir=1&article=1183&context=rhumj>.

DELAHAYE. Jean-Paul. (2001). Les nombres infinit vers la gauche. *Pour la Science*, nº 279, 100–104. Disponível em: <http://www.lifl.fr/~jdelahay/pls/081.pdf>.

EHRLICH. Philip. (2006). The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes. The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: *The Archive History in*

Exact Sciences. V. 60, 1–121. Disponível em: <http://prima.lnu.edu.ua/faculty/mechmat/Departments/MFAUKR/attachments/erlich.pdf>.

FERREIRA, Jamil. (2010). *A construção dos números*. Textos Universitários. Rio de Janeiro: SBM.

GOLDBLATT, Robert. (1998). *Lectures on the Hyprreeals numbers: an introduction to non standard analisys*. New York: Springer.

GOUVÊA, F. Q. (1997). *p-adic numbers*. New York: Springer.

GUSMÃO, Italo, B. (2016). *Números p-ádicos*. Dissertação de Mestrado Profissional PROFMAT, João Pessoa: UFPB.. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/9337/2/arquivototal.pdf>.

GAUTSCHI, Walter. Alessandro M. (2002). Ostrowski (1893–1986): la sua vita e le opere. *Boll. Docenti Matem*. v. 45, 9–19. Disponível em: <https://www.cs.purdue.edu/homes/wxg/AMOital.pdf>.

HASSE, Helmut. (1980). *Number Theory*. Springer: New York.

HEFEZ, Abramo. (2013). *Um curso de Àlgebra*, v. 1, Rio de Janeiro: SBM.

HOLLY, Jan E. (2001). Pictures of Ultrametric Spaces, the p-adic Numbers, and Valued Fields. *The mathematical association of America*. October, 721–728. Disponível em: <https://www.colby.edu/math/faculty/Faculty_files/hollydir/Holly01.pdf>.

HUAMAN, Ronald M. (2015). Raıces p-adicas de la unidad. (Tesis de Maestrıa). Pontificia Universidad del Perú: Lima. Disponível em: <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/6415/MAS_HUAMAN_RONALD_PADICAS.pdf;sequence=1>.

LAGES, Elon. (2010). *Curso de Análise*, v. 1. Rio de Janeiro: SBM.

LAPIDUS, Michel L.; HUNG. Lu. (2011). The Geometry of p-Adic Fractal Strings: A Comparative Survey. *Contemporary Mathematics*, v. 551, 163–206. Disponível em: <http://www.math.ucr.edu/~lapidus/papers/ContMath/GeometrypAdicStringsSurvey10893.pdf>.

LAPIDUS, Michel L.; HUNG. Lu. (2008). Nonarchimedean Cantor set and string. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*. v. 4, p. 1–10. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/6dee/45208234f48fe156d174d4ad56b17363d2ef.pdf>.

LEGUAY, Mathieu; HENRI, Joseph. (1992). Distance p-adique : une distance qui n'est pas habituelle. *MATh.en.JEANS" au Palais de la Découverte*. 33–36. Disponível em: <http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/92033036.pdf>.

MARCOS, José. E. (2006). The algebraic closure of a p-adic number field is a complete topological field. Mathematica Slovaca,v. 56, No. 3, p. 317—331. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.1010.7259&rep=rep1&type=pdf>.

MASIAS, Henry Zorrilla. (2011). Complecion no arquimedeana. *Pro Mathematica*, v. 25, 49−50. Disponível em: <http://revistas.pucp.edu.pe/index.php/promathematica/article/viewFile/2666/2610>.

NARICI, Lawrence; BECKENSTEIN, Edward. (1981). Strange Terrain--Nonarchimedean Spaces. The American Mathematical Monthly, Vol. 88, No. 9 (Nov., 1981), pp. 667−676. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/pdf/2320670.pdf>.

OSTROWSKI, A. (1916). Uber einige L¨osungen der Funktionalgleichung ¨ φ(x)φ(y) = φ(xy)", *Acta Mathematica* (2nd ed.), nº 41, no. 1, 271–284. Disponível em: <https://projecteuclid.org/euclid.acta/1485887472>.

KATO, Kazuya; KUROKAWA, Nobushige; SAITO, Takeshi, (2000). Number theory 1: Fermat's dream, Translations of Mathematical Monographs, vol. 186, *American Mathematical Society*, Providence, RI.

KATOK, S. (2007). *p-adic analysis compared with real*. Student mathematical library, American Mathematical Soc.

KOBLITZ, Neal. (1984). *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta- Functions*. New York: Springer.

KHRENNIKOV, Andrei; KOTOVICHM, Nikolay. (2017). Image Segmentation with the Aid of the p-Adic Metrics. In: TONI, Bourama. *New Trends and Advanced Methods in Interdisciplinary Mathematical Sciences*. 143–155.

KUMAR, Ashish; RANI, Mamta; CHUGH, Renu. (2013). New 5-adic Cantor sets and fractal string. *SpringerPlus*, 1–7. Disponível em: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1186%2F2193-1801-2-654.pdf>.

LEWIS, Robert Y. (2019). A formal proof of Hensel's lemma over the p-adic integers. CPP'19, January p. 14–15, Lisbon, PT. Disponível em: <http://robertylewis.com/padics/padics.pdf>.

NATARAJAN, P N; RANGANATHAN, K. N. (2000). A Geometry in which all Triangles are Isosceles An Introduction to Non-Archimedean Analysis. *Resonance*, October, 32–42. Disponível em: <https://www.ias.ac.in/article/fulltext/reso/005/10/0032-0042>.

NEUKIRCH, J. (1990). The p-Adic numbers. EBBINGHAUS, H.-D. *Numbers*. New York: Springer. 155–179.

OLIVEIRA, Graciano. (2009). O corpo dos p-ádicos. *Gazeta Matemática*, Dezembro, 7 – 18. Disponível em: <http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=258>.

ORBEGOSO, Jorge Luis Rojas. *Completitud y clausura algebraica de campos P-ádicos*. Universidad nacional mayor de san marcos. Perú: Lima, 2016. Disponível em: <http://cybertesis.unmsm.edu.pe/bitstream/handle/cybertesis/6315/Rojas_oj.pdf?sequence=1>.

PITANEN, Matti. (2015). How Imagination Could Be Realized p-Adically?. *Journal of Consciousness Exploration & Research*, v 6, nº 6, 354–356. Disponível em: <https://jcer.com/index.php/jcj/article/viewFile/468/488>.

REDDY, B. Surender; SHANKARAIAH, D. (2013). On i-cauchy sequences in p-adic linear 2-normed spaces. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. v. 89, nº 4, 483 – 496. Disponivel em: <https://ijpam.eu/contents/2013-89-4/4/4.pdf>.

RIBENBOIM, Paulo. (1999). *The Theory of Classical Valuations*. New York: Springer.

ROBERT, Alain. (1996). Qu´est-qe que le nombres p-ádique? Societé des enseignants neuchâtelois des Sciences. Bulletin, setembre, 5–12. Disponível em: <http://www.sens-neuchatel.ch/bulletin/anciens-no-pdf/BULL18.PDF>.

ROZIKOV, U. A. (2013). What are p-Adic Numbers? What are They Used for?. *Asia Pacific Mathematics Newsletter*. v. 3, nº 4, 1 – 6, October. Disponível em: <http://www.asiapacific-mathnews.com/03/0304/0001_0006.pdf>.

SCHIKHOF W. H. (1984). *Ultrametric Calculus: An introduction to p-adic Analysis*. Cambridge: University Press.

SCHLICHENMAIER, Martin. (2007). *An Introduction to Riemann Surfaces, Algebraic Curves and Moduli Spaces*. Springer: New York.

SILVERMANM, Joseph H. (2013). What is the p-adic Mandelbrot Set?. *Notices of the AMS*, setember, v. 60, nº 8, 1048–1050. Disponível em: <http://www.ams.org/notices/201308/201308-full-issue.pdf>.

STEUDING, Jorn. (2002). The world of p-adic numbers and p-adic functions. *Faculty of Physics and Mathematics*. nº 5, 90 – 107. Disponível em: <http://siauliaims.su.lt/pdfai/2002/STEUD-02.pdf>.

TEITELBAUM. Jeremy. (1995). The Geometry of p-adic Symmetric Spaces. *Notice in American Mathematical Monthly*. v. 42, nº 10, 1120 – 1126. Disponível em: <https://www.ams.org/notices/199510/teitelbaum.pdf>.

TELLER, Jacek. (2012). *Newton polygons on p-adic number fields*. (dissertation in Arts and Mathematics). East Caroline University. Disponível em: <http://thescholarship.ecu.edu/bitstream/handle/10342/3848/Teller_ecu_0600M_10676.pdf?sequence=1>.

TORRES, Sergio Carrillo; AMAYA, Carlos Hurtado. (2001). Una introduccion a los numeros p-adicos. *Memorias XVIII encuentro de geometrıa y VI de aritmetica*, 359–369. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/5615/1/CarrilloUnaintroduccionGeometr%C3%ADa2008.PDF>.

VACCON. Tristan. (2015). *Précision p-adique*. (thésis de doctorat). Rennes: Université de Rennes. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01205269v2/document>.

Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves
Professor Titular do departamento de Matemática e Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE.

E-mail: fregis@ifce.edu.br

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira
Professor departamento de Matemática da Universidade Regional do Cariri – URCA.

E-mail: pcurca@gmail.com