*Traduções*
*Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática – Vol. 23, nº 46 – pp. 258–295*
*Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática*
ISSN 1519-955X

# TRADUÇÃO DAS "CONSIDÉRATIONS PHILOSOPHIQUES SUR LES ÉLÉMENS DE LA SCIENCE DE L'ÉTENDUE" DE JOSEPH DIEZ GERGONNE, JANEIRO DE 1826.

Cleber Haubrichs
*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologiado Rio de Janeiro – IFRJ – Brasil*

(aceito para publicação em fevereiro de 2023)

## Resumo

Apresenta-se aqui uma tradução comentada para língua portuguesa do texto "*Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue*". O artigo original em francês foi publicado em janeiro de 1826 por Joseph Diez Gergonne (1771–1859) nos *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, o periódico em que ele foi o editor e maior contribuidor. Neste texto, Gergonne sistematiza a geometria dos teoremas que aparecem aos pares, e o faz em torno da ideia de "dualidade", que ele assume enquanto princípio filosófico. Gergonne defende que a dualidade é uma propriedade que é inerente à própria natureza do espaço. Os teoremas dessa geometria, nos quais os enunciados aparecem aos pares, são caracterizados por não dependerem de nenhuma consideração ou relação métrica entre os elementos geométricos envolvidos. A geometria dos teoremas duplos é nomeada por Gergonne de "geometria de situação". Por fim, deve se notar uma inovação editorial que aparece nesse texto, que é a redação da argumentação em colunas duplas, o que torna ainda mais evidente o pareamento dos enunciados.

**Palavras-chave:** Geometria de situação, princípio da dualidade, Gergonne, filosofia matemática.

## [TRANSLATION OF " CONSIDÉRATIONS PHILOSOPHIQUES SUR LES ÉLÉMENS DE LA SCIENCE DE L'ÉTENDUE", BY JOSEPH DIEZ GERGONNE, JANUARY 1826]

## Abstract

Here is a commented translation into Portuguese of the text "*Considerations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue*". The original article in French was published in January 1826 by Joseph Diez Gergonne (1771–1859) in the *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, the periodical to which he was the editor and major contributor. In this text, Gergonne systematizes the geometry of theorems that appear in pairs, and does so around the idea of "duality", which he assumes as a philosophical principle. Gergonne argues that duality is a property that is inherent to the nature of space. The theorems of this geometry, in which the statements appear in pairs, are characterized by not depending on any consideration or metric relationship between the geometric elements involved. The geometry of the double theorems is named by Gergonne "geometry of situation". Finally, it should be noted an editorial innovation that appears in this text, which is the writing of the argument in double columns, which makes the pairing of statements even more evident.

**Keywords:** geometry of situation, principle of duality, Gergonne, mathematical philosophy.

## 1. Apresentação

Qualquer pessoa que já tenha estudado geometria já ouviu (ou já falou) que "dois pontos distintos determinam uma reta". Possivelmente também já se deparou com a sentença que diz que "duas retas distintas determinam um ponto". Desconsiderando momentaneamente o arcabouço teórico/matemático que permite que essas duas proposições sejam válidas, e concentrando as atenções no aspecto puramente formal dessas frases, a primeira coisa que se nota é que os enunciados são simétricos entre si. Parece que as duas afirmativas são como a *cara* e a *coroa* de uma mesma moeda.

Proposições aos pares, como as desse tipo, foram pouco a pouco apercebidas por geômetras franceses do início do século dezenove, especialmente entre os leitores da revista *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées.* A partir de 1810 o referido jornal circulou na França, impresso regularmente em fascículos mensais de mais ou menos 30 a 40 páginas. Este foi o primeiro jornal moderno na Europa, especializado em publicação de artigos de pesquisas em matemáticas. De ano em ano, os doze fascículos da temporada eram reunidos num volume. Ao todo o jornal durou sem interrupções até 1832, produzindo 22 volumes. Ao longo de sua existência, foram publicados ali 839 textos, assinados por pouco mais de uma centena de autores franceses e estrangeiros.

Inicialmente o periódico era editado por Joseph Esprit Thomas Lavernède (1764–1848) e por Joseph Diez Gergonne (1771–1859), ambos professores de matemática em Nîmes, uma cidade localizada no sul da França. Mas já a partir de terceiro volume, o jornal passou a ser dirigido exclusivamente por Gergonne. Além de ter sido o editor, Gergonne também foi o maior colaborador dos Annales. É ele quem assina pouco mais de um quinto da quantidade de textos publicados ali. Essa quantidade numerosa de artigos já justificaria por si só o apelido de *Annales de Gergonne*, com o qual o jornal ficou conhecido desde sua época e até a posteridade entre matemáticos e historiadores.

Mas isso não é tudo. Gergonne era também um grande animador do jornal, no sentido de incentivar a aparição de autores entre seus leitores. Um dos recursos usados por Gergonne era a publicação sistemática em todos os fascículos das seções de *Questões*

*Propostas* e *Questões Resolvidas*, um expediente de enorme sucesso editorial. Outro expediente utilizado pelo editor era o de traduzir e publicar textos integrais ou resumos substanciais de artigos publicados por autores (e em jornais) estrangeiros. Com isso, de certa forma ele alargava o espectro de autores para o seu jornal. Outra grande marca da editoração de Gergonne nos *Annales* é a quantidade enorme de comentários que ele fazia nos textos de todos os autores que publicaram no seu jornal. O editor tinha por hábito inserir muitas notas de rodapé nos textos publicados. A maioria dessas notas indicava aparições anteriores nos *Annales* de um certo tema que estivesse sendo tratado no texto atual. No caso de um teorema que estivesse sendo apresentado, ele costumava indicar (quando houvesse) versões de reprise, de generalização ou de casos particulares, além de demonstrações alternativas.

Embora o jornal tivesse textos sobre cálculo infinitesimal, álgebra, probabilidade, aritmética, ensino de matemática, astronomia, etc, seguramente os assuntos que mais mobilizaram leitores e autores nesse periódico foram as diversas geometrias. E, em particular, a tal “geometria dos teoremas duplos”, especialmente na década de 1820, pela grande quantidade de textos sobre o assunto. Os resultados acumulados e dispersos em torno do assunto não passaram despercebidos por Gergonne. Em janeiro de 1826 ele publicou um trabalho nos *Annales* onde se esforça por sistematizar essa “geometria dos teoremas duplos”. Trata-se das “*Considerações filosóficas sobre os elementos da ciência da extensão*”, cuja tradução é apresentada integralmente aqui.

Gergonne acreditava que o pareamento de teoremas em certa parte da geometria não era consequência de nenhuma construção geométrica específica, mas da própria natureza do espaço – ou da “extensão”, para usar o vocabulário empregado por ele desde o título das *Considerações filosóficas*. Esse seu posicionamento filosófico, como ele mesmo faz questão de enfatizar várias vezes ao longo do texto, toma forma discursiva a partir do que ele passou a chamar de *dualidade*. Embora ele não use ainda a palavra *princípio*, é dessa maneira que a dualidade será tratada nas suas convicções e nos seus textos doravante. Para atender a esse “princípio da dualidade”, Gergonne inventa a *geometria de situação*, um misto de disciplina e rubrica editorial, na qual os teoremas são sempre enunciados em pares (ditos “pares duais”). É curioso como Gergonne começa suas *Considerações filosóficas* tentando definir a nova geometria, não por dizer o que ela é, mas por dizer o que ela *não* é. Mais exatamente, logo na primeira frase ele separa as diversas teorias que compõem a geometria em duas abordagens muito distintas, a saber, as *relações métricas* e as *relações de situação*; e a geometria das relações de situação *não é* a geometria das relações métricas.

Nas suas tentativas de explicar o que é (e o que não é) a sua geometria de situação, ou para esclarecer aspectos complicados da teoria, Gergonne inventa palavras e conceitos que pouco a pouco foram incorporados ao vocabulário das geometrias do século dezenove. Em particular, “dualidade” é uma dessas expressões que apareceram na época, e que faz parte do que os matemáticos de hoje em dia chamam de geometria projetiva (ou, mais geralmente, geometria algébrica).

A leitura de diversos artigos anteriores a janeiro de 1826 que Gergonne recupera para ilustrar a sistematização da sua nova geometria; bem como a leitura de muitos trabalhos posteriores nos *Annales*, editorialmente classificados sob a rubrica *Geometria de*

*Situação*, nos ajuda a atender um pouco mais positivamente qual é o escopo da nova teoria. De modo geral, do que se lê nos textos assinados por Gergonne e por uma miríade de outros geômetras, pode-se entender melhor do que se trata essa nova geometria. A geometria de situação engloba teoremas que tratam de configurações de elementos geométricos no que diz respeito a incidências: interseções, tangências, concorrências, alinhamentos, etc. Alguns dos geômetras que se engajaram nessa construção coletiva, seja colaborativamente, seja em disputas de posicionamentos ou resultados, foram os franceses Jean Victor Poncelet (1788–1867), Michel Chasles (1793–1880) e Étienne Bobillier (1798–1840). E os alemães Jakob Steiner (1796–1863) e Julius Plücker (1801–1868), entre muitos outros.

No texto de Gergonne de janeiro de 1826, chamam a atenção as duas estratégias empregadas pelo autor/editor para convencer seus leitores da validade do princípio da dualidade. Primeiramente, o fato de que ele demonstra cada teorema e cada correspondente seu diretamente, o que enfatiza que até mesmo entre as demonstrações dos teoremas, e não só nos enunciados, existe correspondência. E a segunda estratégia é a apresentação de teoremas e demonstrações duais em colunas paralelas. Dessa vez trata-se de algo puramente editorial, do ponto de vista da diagramação da página mesmo, mas com intenção de forte impacto no leitor. Cada página do jornal passa a ser, de fato, duas pequenas páginas de textos que correm juntas, para "tornar esta correspondência mais evidente (...) [e] de tal modo que as demonstrações possam servir-se de controle recíproco". Essa idéia não é nova em seu jornal, conforme o próprio autor/editor relembra e dá a referência. Mas dessa data para frente, esta apresentação em colunas duplas se tornará algo bastante recorrente nos *Annales*.

O artigo é composto de uma introdução seguida de três seções e uma conclusão. A seção I é intitulada *Noções Preliminares*. Gergonne apresenta proposições (que são axiomas ou definições) em pares duais numerados de 1 a 15. São axiomas de incidência entre pontos, retas e planos. Há também definições de elementos de polígonos e poliedros, tais como vértice, lado, aresta, face, etc. E proposições que descrevem/definem como polígonos e poliedros são inscritos ou circunscritos uns aos outros. A seção II tem por título *Teoremas sobre os triângulos, os quadriláteros, os ângulos triédricos e os ângulos tetraédricos*. O autor enuncia e demonstra teoremas em pares duais numerados de 16 a 20, cujo conteúdo está suficientemente bem esclarecido pelo título da própria seção. E a seção III chama-se *Teoremas sobre os poliedros*. É composta de teoremas e demonstrações, em pares duais numerados de 21 a 28, falando de diversas configurações envolvendo inscrição e circunscrição de poliedros entre si. Espalhados ao logo do texto, é possível encontrar alguns teoremas que hoje em dia são clássicos em geometria. Há versões do que conhecemos como Teorema de Desargues e seu recíproco nos pares duais 16, 17 e 18, e há versões do que chamamos de Teorema de Pascal e seu recíproco nos pares duais 26 e 27.

Encerro essa apresentação voltando à questão principal que Gergonne evoca desde o título do texto, bem como na sua introdução e conclusão. Nas suas falas finais, o autor afirma crer que argumentou o suficiente para "colocar fora de qualquer contestação" esse fato da filosofia matemática: o de que os teoremas de situação e a notável propriedade da dualidade aparecem na geometria "em virtude da natureza mesmo do espaço". O próprio autor não se aprofunda nesse debate, mas cabe aqui questionar-se o porquê dessa afirmação. Minha hipótese é de que a crença de Gergonne de que os teoremas de situação são *intrínsecos ao espaço* é parte da necessidade de uma contraposição com os teoremas métricos. De fato, para acontecer uma geometria métrica, ao espaço deve ser imputado um sistema de medidas, ou seja, algum tipo de *aritmética*. Por conseguinte, a geometria de situação seria uma geometria primeira, a mais pura, justamente porque não depende de aritmética para se revelar.

## Bibliografia

ANÔNIMO (un Abonné). 1819. Géométrie élémentaire. Recherches sur les polyèdres, renfermant en particulier un commecement de solution du problème proposé à la page 256 du VII.[e] volume des Annales. *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, 9 (1818–1819), pp. 321–344. http://www.numdam.org/item/AMPA_1818-1819__9__321_0/

DANDELIN. 1825. Géométrie pure. Recherches nouvelles sur les sections du cône et sur les hexagones inscrits et circonscrits à ces sections. *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, 15 (1824–1825), pp. 387-396. http://www.numdam.org/item/AMPA_1824-1825__15__387_1/

GERGONNE. 1821. Questions résolues. Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 289 du IX.[e] volume de ce recueil. *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, 11 (1820–1821), pp. 326-336. http://www.numdam.org/item/AMPA_1820-1821__11__326_0/

GERGONNE. 1824. Géométrie élémentaire. Recherche de quelques-unes des lois générales qui régissent les polyèdres. *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, 15 (1824–1825), pp. 157–164. http://www.numdam.org/item/AMPA_1824-1825__15__157_1/

GERGONNE. 1826. Philosophie mathématique. Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue. *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, 16 (1825– 1826), pp. 209–231. http://www.numdam.org/item/AMPA_1825-1826__16__209_0/

HAUBRICHS, Cleber. (no prelo). *Geometria de Situação: problemas e teoremas aos pares no século dezenove*. Rio de Janeiro, Editora SBM, Coleção História da Matemática.

HAUBRICHS, Cleber. 2015. *Étienne Bobillier (1798–1840): percursos matemático, docente e profissional*. Tese de doutorado. História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, UFRJ.

QUESTIONS PROPOSÉES. 1825. Théorème de Géométrie. *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, 15 (1824–1825), p. 396. http://www.numdam.org/item/AMPA_1824-1825__15__396_1/

SORLIN. 1825. Trigonométrie. Recherches de trigonométrie sphérique. *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, 15 (1824–1825), pp. 273–304. http://www.numdam.org/item/AMPA_1824-1825__15__273_0/

VECTEN. 1821. Géométrie de la règle. Lettre au Rédacteur des *Annales*, sur la démonstration à la page 326 du XI.e volume de ce recueil, des deux théorèmes énoncés à la page 289 du IX.e volume du même recueil. *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, 12 (1821–1822), pp. 69–72. URL: http://www.numdam.org/item/AMPA_1821-1822__12__69_0/

**Cleber Haubrichs**

Instituto Federal do Rio de Janeiro – IFRJ – *Campus* Nilópolis – Brasil

**E-mail:** cleber.santos@ifrj.edu.br

Folha de rosto do artigo “Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l’étendue” de Gergonne, janeiro de 1826.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION. 209

# PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

*Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l’étendue.*

Par M. GERGONNE.

> Tantum series juncturaque pollet. ( HOR. )

LES diverses théories dont se compose le domaine de la science de l’étendue peuvent être rangées en deux classes très-distinctes. Il est, en effet, certaines de ces théories qui dépendent essentiellement des *relations métriques* qui se trouvent exister entre les diverses portions d’étendue que l’on compare, et qui conséquemment ne sauraient être établies qu’à l’aide des principes du calcul. D’autres, au contraire, sont tout-à-fait indépendantes de ces mêmes relations, et résultent uniquement de la *situation* que se trouvent avoir les uns par rapport aux autres, les êtres géométriques sur lesquels on raisonne; et, bien que très-souvent on les déduise des proportions et du calcul, on peut toujours, en s’y prenant d’une manière convenable, les en dégager complètement. Mais il peut quelquefois devenir nécessaire pour cela de passer tour à tour de la géométrie plane à celle de l’espace et de celle-ci à la première, comme Monge et les géomètres de son école l’ont si souvent pratiqué, et avec tant de succès.

Il est donc raisonnablement permis de se demander, d’après cela,

*Tom. XVI*, *n.° VI*, 1.er *janvier* 1826. 28

## 2. Tradução

**GEOMETRIA DE SITUAÇÃO. FILOSOFIA MATEMÁTICA.**
**Considerações filosóficas sobre os elementos da ciência da extensão.**

*Tomo XVI, n.º VI, 1º de janeiro de* 1826.

Pelo Sr. Gergonne.

Tantum series juncturaque pollet. (Hor.)[1]

As diversas teorias que compõem o domínio da ciência da extensão podem ser organizadas em duas classes muito distintas. Existem, de fato, algumas dessas teorias que dependem essencialmente das *relações métricas* que possam existir entre as várias porções de extensão que são comparáveis e que, consequentemente, só poderiam ser estabelecidas com o auxílio dos princípios do cálculo. Outras, ao contrário, são completamente independentes dessas mesmas relações, e resultam unicamente da *situação* que tenham, uns para com outros, os entes geométricos sobre os quais se raciocina; e, ainda que muitas vezes se deduzam de proporções e cálculos, sempre se pode, procedendo de maneira adequada, desvencilha-las completamente. Mas para isso, pode ser necessário às vezes que se passe alternadamente da geometria plana para a espacial e vice versa, como Monge e os geômetras de sua escola praticaram tantas vezes e com tanto sucesso.[2]

É, portanto, razoavelmente permissível perguntar, a partir disso, se nossa maneira de dividir a geometria em *geometria plana* e *geometria espacial* é tão natural e tão exatamente conforme a essência das coisas quanto vinte séculos de hábito nos possam persuadir. Ainda assim, permanece verdadeiro que, renunciando a isso, se conseguiria, recorrendo, por assim dizer, apenas à simples intuição, avançar bem mais longe na geometria dos iniciantes do que no estudo do cálculo que, muito frequentemente apresentado desde o início, apenas cansa, e que talvez se entregasse a ela mais tarde com muito menos relutância, quando sua inteligência tivesse sido ampliada e fortalecida pelo estudo de uma série mais ou menos prolongada de propriedades da extensão.

Mas um caráter extremamente marcante dessa parte da geometria que em nada depende das relações métricas entre as partes das figuras é que, com exceção de alguns teoremas que são simétricos a si mesmos, como o teorema de Euler sobre os poliedros, e seu análogo sobre os polígonos, todos os teoremas ali são duplos; quer dizer que, na geometria plana, a cada teorema sempre corresponde necessariamente um outro que dele se deduz simplesmente trocando entre eles as duas palavras *pontos* e *retas*; enquanto que, na

[1] Nota do Tradutor. Esta epígrafe escolhida por Gergonne está em latim sem tradução abrindo suas "Considerações filosóficas". É retirada do poeta latino clássico Horácio (65 a.E.C.– 8 a.E.C.), no verso 242 da sua obra mais conhecida, a "Arte Poética".

[2] Nota do Tradutor. Aqui Gergonne refere-se a Gaspard Monge (1746-1818) que, em diferentes momentos entre 1794 e 1816, foi diretor da Escola Politécnica de Paris, além de professor de uma grande quantidade de geômetras cujos trabalhos floresceram na primeira metade do século 19. Em particular, foi na Escola Politécnica que Monge se notabilizou por sua Geometria Descritiva, que inclui, entre suas técnicas, a referida "passagem alternada da geometria plana para a espacial e vice versa".

geometria espacial, são as palavras *pontos* e *planos* que devem ser trocadas entre si para passar de um teorema a seu correlativo.

Entre um grande número de exemplos que poderíamos selecionar, no presente periódico, desse tipo de *dualidade* de teoremas que constituem a *geometria da situação*, nos limitaremos a indicar, como os mais notáveis, os dois elegantes teoremas do Sr. Coriolis, demonstrados inicialmente na página 326 do XI.º volume, depois na página 69 do XII.º, e o artigo que nós mesmos publicamos na página 157 do volume anterior, sobre as leis gerais que regem os poliedros. É, ademais, uma sequência inevitável das propriedades dos polos, polares, planos polares e polares conjugados das linhas e superfícies de segunda ordem, que desempenham aqui um papel bastante análogo ao desempenhado pelo triângulo suplementar na trigonometria esférica onde, como foi mostrado ao longo do interessante memorial do Sr. Sorlin (volume XV, pag. 273), os teoremas também podem ser divididos em duas séries paralelas, de modo a se corresponderem dois a dois, com a maior precisão.[3]

Todavia, por mais digno de nota que possa ser um fato geométrico dessa importância, e por mais recursos que possa oferecer, em grande número de casos, para a obtenção, de algum modo, de novos teoremas que mal foram vislumbrados, mesmo pelos geômetras que, em tempos recentes, têm estado especialmente ocupados com a pesquisa das propriedades da extensão; ainda é tão pouco filosófica, mesmo hoje em dia, a maneira de estudar as ciências.

E é isso que nos determina a fazer deste tipo de geometria *em partes duplas*, se é permitido expressar-se assim, o assunto de uma escrita especial na qual, depois de ter tornado manifesto o fato filosófico em questão, na própria apresentação das primeiras noções, vamos nos basear nelas, seja para demonstrar alguns teoremas novos, seja para dar novas demonstrações a alguns teoremas já conhecidos, o que adiante os tornarão completamente independentes das relações métricas nas quais tem-se até agora o costume de os deduzir.

Poderíamos muito bem nos limitar a demonstrar apenas metade de nossos teoremas e deduzir a outra metade com a ajuda da teoria dos polos. Mas preferimos demonstrá-los diretamente uns e outros, tanto para não se desviar dos primeiros elementos e tornar acessível o que vamos mostrar até mesmo para quem nem conheça os *Elementos de Euclides*, quanto para ter a oportunidade de observar que existe entre as provas de dois teoremas emparelhados a mesma correspondência que existe entre seus enunciados. Teremos ainda o cuidado, para tornar esta correspondência mais evidente, de apresentar os teoremas análogos em duas colunas, face a face uma com a outra, como já utilizamos no artigo sobre os poliedros mencionado acima; de tal modo que as demonstrações possam servir-se de controle recíproco.

Consideramos supérfluo acompanhar este memorial com figuras, muitas vezes mais embaraçosas do que úteis, na geometria espacial; figuras, aliás, que só poderíamos

[3] Nota do Tradutor. Neste trecho Gergonne menciona quatro trabalhos anteriores, cujas referências podem ser encontradas na bibliografia da apresentação desta tradução. Um dos artigos sobre poliedros é dele mesmo (GERGONNE 1824). Há um artigo de trigonometria esférica de Sorlin, que foi professor de ciências físicas no Colégio Real de Tournon (SORLIN 1825). Os outros dois trabalhos referem-se a resultados do gêometra Gustave Coriolis (1792-1843) que foi ex-aluno e professor na Escola Politécnica de Paris. Porém os resultados de Coriolis são apresentados indiretamente, inseridos em textos assinados por outros autores e não pelo próprio Coriolis, a saber, (GERGONNE 1821) e (VECTEN 1821).

oferecer num aspecto único e individual ao leitor que poderia, ao contrário, construí-las e moldá-las como quisesse, se julgasse necessário. Trata-se aqui apenas, de fato, de deduções lógicas, sempre fáceis de seguir, desde que as notações sejam escolhidas de maneira adequada.

### §. I. *Noções preliminares*.

1. Dois pontos distintos entre si, dados no espaço, determinam uma reta ilimitada que, quando esses dois pontos são designados por A e B, pode ela mesma ser designada por AB.

1. Dois planos não paralelos, dados no espaço, determinam uma reta ilimitada que, quando esses dois planos são designados por A e B, pode ela mesma ser designada por AB.

2. Três pontos dados no espaço, que não se confundam dois a dois e não pertençam à uma mesma linha reta, determinam um plano ilimitado que, quando esses três pontos são respectivamente designados por A, B, C, pode ser ele mesmo designado por ABC.

2. Três planos, não paralelos dois a dois no espaço, e não passando por uma mesma linha reta, determinam um ponto que, quando esses três planos são respectivamente designados por A, B, C, pode ele próprio ser designado por ABC.

3. Um plano também pode ser determinado no espaço por uma reta e por um ponto que não está contido nela, ou ainda por duas retas que concorrem num mesmo ponto.

3. Um ponto também pode ser determinado no espaço por uma reta e um plano no qual ela não esteja situada, ou por duas retas situadas num mesmo plano.

4. É apenas acidentalmente que pontos, em quantidade superior a três, no espaço, determinam um único plano, que se pode então designar pela totalidade das letras que designam esses diferentes pontos. Também é apenas acidentalmente que duas retas, e com mais forte razão uma quantidade maior, estão num mesmo plano.

4. É apenas acidentalmente que planos, em quantidade superior a três, no espaço, determinam um único ponto, que se pode então designar pela totalidade das letras que designam esses diferentes planos. Também é apenas acidentalmente que duas retas, e com mais forte razão uma quantidade maior, concorrem num mesmo ponto.

5. De modo geral, pontos em quantidade *n*, determinam, no espaço, retas em quantidade

$$\frac{n}{1} \bullet \frac{n-1}{2},$$

e planos em quantidade

5. De modo geral, planos em quantidade *n*, determinam, no espaço, retas em quantidade

$$\frac{n}{1} \bullet \frac{n-1}{2},$$

e pontos em quantidade

| | |
|---|---|
| $\frac{n}{1} \bullet \frac{n-1}{2} \bullet \frac{n-2}{3}$. | $\frac{n}{1} \bullet \frac{n-1}{2} \bullet \frac{n-2}{3}$. |
| É apenas acidentalmente que eles determinam uma quantidade menor. | É apenas acidentalmente que eles determinam uma quantidade menor. |
| 6. Se pode-se verificar em mais de duas retas que, sem passar todas por um mesmo ponto, duas dentre elas, qualquer que seja a maneira como se escolha, estão sempre num mesmo plano, pode-se concluir que todas elas estão situadas num plano único. | 6. Se pode-se verificar em mais de duas retas que, sem estar todas num mesmo plano, duas dentre elas, qualquer que seja a maneira como se escolha, concorrem sempre num mesmo ponto, pode-se concluir que todas elas concorrem num ponto único. |
| 7. Quatro retas incluídas num mesmo plano determinam, em geral, seis pontos, distribuídos três a três sobre essas quatro retas. Esses seis pontos determinam três novas retas que, por sua vez, determinam três novos pontos. | 7. Quatro retas partindo de um mesmo ponto no espaço determinam, em geral, seis planos, passando três a três por essas quatro retas. Esses seis planos determinam três novas retas que, por sua vez, determinam três novos planos. |
| 9. Pontos, em quantidade qualquer, situados no mesmo plano, podem ser considerados como os *vértices* de um polígono, cujos *lados* são determinados por esses mesmos pontos, tomados consecutivamente dois a dois, e em qualquer ordem, do primeiro ao o último e deste para o primeiro.[4] | 9. Planos, em quantidade qualquer, provenientes de um mesmo ponto no espaço, podem ser considerados como as *faces* de um ângulo poliedro, cujas *arestas* são determinadas por esses mesmos planos, tomados consecutivamente, dois a dois, e em qualquer ordem, do primeiro ao último e deste ao primeiro. |
| 10. Retas, em quantidade qualquer, partindo de um mesmo ponto no espaço, podem ser consideradas as *arestas* de um ângulo poliedro, cujas *faces* são determinadas por essas mesmas retas, tomadas consecutivamente duas a duas, e em qualquer ordem, da primeira à última, e desta à primeira. | 10. Retas, em quantidade qualquer, situadas num mesmo plano, podem ser consideradas os *lados* de um polígono, cujos *vértices* são determinados por essas mesmas retas, tomadas consecutivamente duas a duas, e em qualquer ordem, da primeira à última, e desta à primeira. |
| 11. Um polígono que tenha tantos lados quanto um outro tenha de vértices é dito *circunscrito* nele quando, estando esses | 11. Um ângulo poliédrico que tenha tantas arestas quanto um outro tenha de faces, é dito *inscrito* nele quando, esses dois |

[4] Nota do Tradutor. No texto original não existe o par de proposições numeradas por "8", embora pouco mais adiante no texto o autor vá se referir a esse par. Essa ausência provavelmente é uma distração editorial não revisada antes da publicação final e não chega a causar prejuízo na compreensão do argumento principal do texto.

| | |
|---|---|
| dois polígonos situados num mesmo plano, os vértices do último estão respectivamente situados nas direções dos lados do primeiro. | ângulos poliédricos tendo um mesmo vértice, os planos das faces do último contêm respectivamente as arestas do primeiro. |
| 12. Um ângulo poliédrico que tenha tantas faces quanto um outro tenha de arestas, é dito *circunscrito* nele quando, esses dois ângulos poliédricos tendo um mesmo vértice, as arestas do último estão respectivamente nos planos das faces do primeiro. | 12. Um polígono que tenha tantos vértices quanto um outro tenha de lados é dito *inscrito* nele quando, estando esses dois polígonos situados num mesmo plano, as direções dos lados do último contêm respectivamente os vértices do primeiro. |
| 13. Um polígono é dito *inscrito* em um ângulo poliédrico que tenha tantas arestas quanto este polígono tenha de vértices, quando os vértices do polígono estão respectivamente sobre as arestas do ângulo poliedro. | 13. Um ângulo poliédrico é dito *circunscrito* em um polígono que tenha tantos lados quanto este ângulo poliédrico tenha de faces, quando as faces do ângulo poliédrico contêm respectivamente os lados do polígono. |
| 14. Pontos, em quantidade qualquer, no espaço, podem ser considerados como os *vértices* de um poliedro. Aqueles que pertencem a um mesmo plano determinam as *faces* do poliedro, cujas *arestas* são os lados dessas mesmas faces. | 14. Planos, em quantidade qualquer, no espaço, podem ser considerados como as *faces* de um poliedro. Aqueles que passam por um mesmo ponto determinam os *vértices* do poliedro, cujas *arestas* são as desses mesmos vértices. |
| 15. Um poliedro que tenha tantas faces quanto um outro tenha de vértices é dito *circunscrito* nele quando os vértices do último estão respectivamente nos planos das faces do primeiro. | 15. Um poliedro que tenha tantos vértices quanto um outro tenha de faces é dito *inscrito* nele quando os planos das faces do último contêm respectivamente os vértices do primeiro. |

Observação. No que precede, dispomos as proposições, face a face uma com a outra, como devem ser na geometria tridimensional, e as usaremos desse modo em tudo o que vier a seguir. Na geometria plana, sua correspondência seria um pouco diferente. Assim, por exemplo, a proposição 8 da série à direita deveria corresponder à proposição 7 da série à esquerda.[5]

Os geômetras tendo notado que as retas determinadas por dois vértices não consecutivos de um polígono ou de um poliedro, bem como os planos determinados por

[5] Nota do Tradutor. No texto original o autor menciona, equivocadamente, uma das colunas do par de proposições "8" como correspondente à outra das colunas do par "7". Ao que parece, deve ter havido um pequeno erro editorial do autor aqui. A correspondência que faz mais sentido seria entre a proposição 9 da série à esquerda com a proposição 10 da série à direita.

duas arestas não consecutivas de um ângulo poliédrico, desempenhavam um papel bastante importante na geometria, consideraram útil dar-lhes denominações particulares, e eles as chamaram de *diagonais* e *planos diagonais*. Mas os pontos determinados por dois lados não consecutivos de um polígono; mas as retas determinadas pelos planos de duas faces não consecutivas, seja de um poliedro ou de um ângulo de poliedro, não são de menor importância e, no entanto, não lhes foi atribuída nenhuma denominação especial. Sem dúvida, não teriam falhado em fazê-lo, se as relações que estamos nos esforçando aqui para trazer à tona tivessem sido percebidas pelos criadores da ciência; o que prova, diga-se de passagem, que é somente quando uma ciência já atingiu um grau bastante elevado de maturidade que se pode esperar elaborar bem seu vocabulário. Seja como for, ao invés de criar novas denominações, que podem muito bem não agradar igualmente a todos os leitores, preferimos evitar aqui o uso das palavras diagonais e planos diagonais, que não teriam análogos, substituindo-os constantemente pela perífrase equivalente.

Muitas vezes, adiante, pelo fato de duas retas estarem situadas num mesmo plano, concluiremos que elas se concorrem num mesmo ponto; mas então será necessário subentender que este ponto pode muito bem estar infinitamente afastado.

### §. II. *Teoremas sobre os triângulos, os quadriláteros, os ângulos triédricos e os ângulos tetraedros.*

| | |
|---|---|
| 16. *TEOREMA. Se dois triângulos estão situados no espaço de tal modo que as retas determinadas pelos seus vértices correspondentes, todas as três concorrem num mesmo ponto; seus lados correspondentes concorrerão em três pontos que pertencerão à uma mesma reta.* | 16. *TEOREMA. Se dois ângulos triédricos estão situados no espaço de tal modo que as retas determinadas pelas suas faces correspondentes estejam todas as três situadas num mesmo plano; suas arestas correspondentes determinarão três planos que se cruzarão ao longo de uma mesma linha reta.* |
| *Demonstração*. Sejam A, B, C os três vértices de um dos triângulos, e A’, B’, C’ seus respectivos correspondentes no outro, de modo que as retas AA’, BB’, CC’ coincidam em um mesmo ponto P. | *Demonstração*. Sejam A, B, C as três faces de um dos ângulos triédricos, e A’, B’, C’ seus respectivos correspondentes no outro, de modo que as retas AA’, BB’, CC’ estejam localizadas em um mesmo plano P. |
| As duas retas AA’, BB’, concorrentes em um mesmo ponto P, estão em um mesmo plano, que conterá consequentemente os quatro pontos A, A’, B, B’; portanto, as retas AB e A’B’ estão neste plano e devem, por conseguinte, se concorrer em um ponto. Assim, quaisquer dois lados correspondentes, nos dois triângulos, | As duas retas AA’, BB’ estando situadas em um mesmo plano P, concorrem num mesmo ponto, onde concorrem os quatro planos A, A’, B, B’, portanto as retas AB e A’B’ também concorrem neste ponto e, por conseguinte, estão em um mesmo plano. Assim, quaisquer duas arestas correspondentes, nos dois ângulos |

concorrem em um ponto.

Sejam α, β, γ respectivamente os pontos de intersecção dos lados correspondentes BC e B'C', CA e C'A', AB e A'B', dos dois triângulos. Como esses pontos estão situados sobre as direções dos três lados do triângulo ABC, eles devem estar no plano desse triângulo; mas, por estarem situados sobre as direções dos três lados do triângulo A'B'C', também devem estar no plano deste último triângulo; portanto, os três pontos α, β, γ estão simultaneamente em dois planos; portanto, eles pertencem à intersecção desses dois planos, ou seja, a uma linha reta.

Se concebermos que o ponto de concorrência de três retas determinadas pelos vértices correspondentes dos dois triângulos se aproxima constantemente do plano de um deles; o plano do outro formará um ângulo cada vez menor com o dele, até que finalmente esses dois planos se confundam num só, contendo o ponto em questão; e como, neste movimento, os três pontos α, β, γ não terão deixado de pertencer à mesma linha reta; daí resulta o seguinte teorema:

17. *TEOREMA. Se dois triângulos, situados num mesmo plano, são tais que as retas determinadas por seus vértices correspondentes, todas as três passam por um mesmo ponto; os pontos determinados por seus lados correspondentes pertencerão todos os três a uma mesma reta.*

18. Portanto, *TEOREMA. Se dois ângulos triédricos de mesmo vértice são tais que os planos determinados por suas arestas correspondentes, todos os três passam por*

triédricos, estão situadas em mesmo plano.

Sejam α, β, γ respectivamente os planos que contêm as arestas correspondentes BC e B'C', CA e C'A', AB e A'B' dos dois ângulos triédricos. Como esses planos contêm as três arestas do ângulo triédrico ABC, eles devem se encontrar em seu vértice; mas, por conterem as três arestas do ângulo triédrico A'B'C', também devem se encontrar no vértice deste último ângulo triédrico; portanto, os três planos α, β, γ passam simultaneamente pelos mesmos dois pontos; portanto, ele contem a reta determinada por esses dois pontos; isto é, todos os três se cruzam ao longo da mesma reta.

Se concebermos que o plano das três retas determinadas pelas faces correspondentes dos dois ângulos triédricos se aproxima constantemente do vértice de um deles, a distância deste vértice ao vértice do outro diminuirá cada vez mais, até que finalmente esses dois vértices se confundam em um único ponto, situado no plano em questão; e como, neste movimento, os três planos α, β, γ não deixarão de se cruzar ao longo da mesma reta, resulta o seguinte teorema:

17. *TEOREMA. Se dois ângulos triédricos de mesmo vértice são tais que as retas determinadas por suas faces correspondentes estão todas as três num mesmo plano, os planos determinados por suas arestas correspondentes se cruzarão todas as três ao longo de uma mesma reta.*

18. Portanto, *TEOREMA. Se dois triângulos situados num mesmo plano são tais que os pontos determinados por seus lados correspondentes pertencem a uma*

*uma mesma reta; as retas determinadas por suas faces correspondentes estarão todas as três num mesmo plano.*

*Demonstração*. Se, de fato, cortarmos os dois ângulos triédricos por um mesmo plano, que não passa pelo seu vértice comum, as seções serão dois triângulos, como no caso da proposição acima (17); de onde resulta evidentemente que devem gozar da propriedade anunciada.

*mesma reta, as retas determinadas por seus vértices passarão todas as três por um mesmo ponto.*

*Demonstração*. Se, de fato, considerarmos esses dois triângulos como as seções, pelo mesmo plano, de dois ângulos triédricos, tendo o mesmo vértice fora desse plano, esses dois ângulos triédricos estarão no caso da proposição acima (17); de onde resulta evidentemente que os dois triângulos devem gozar da propriedade anunciada.

*Observações*. A correspondência entre estes vários teoremas é aqui tal como exige a geometria espacial. Na geometria plana, ao contrário, o número 18 (*série da direita*) corresponderia ao número 17 (*série da esquerda*).

Os teoremas incluídos nesses dois números, suscetíveis de se revestirem de uma infinidade de formas diferentes, e dos quais se pode deduzir uma grande quantidade de outros, são fundamentais na *geometria da régua*. Eles oferecem, em particular, os métodos mais simples que se podem empregar para a resolução dos dois problemas seguintes, correspondentes um ao outro, na geometria plana: **I.** *Dois pontos determinando uma reta não conhecida, que um obstáculo impede de traçar, encontrar em uma dada reta, USANDO APENAS A RÉGUA, um terceiro ponto daquela reta*? **II.** *Um ponto não conhecido devendo ser determinado por duas retas, que um obstáculo impede de prolongar, conduzir por um dado ponto, USANDO APENAS A RÉGUA, uma terceira reta que passa por aquele ponto*?

Supondo (17, *série à direita* e 18, *série à esquerda*) que o vértice comum de dois ângulos triédricos se torne o centro de uma esfera de raio qualquer, obtém-se, sobre a esfera, teoremas análogos aos teoremas 17 (*série da esquerda*) e 18 (*série da direita*), em que as retas serão substituídas por arcos de grandes círculos. Conclui-se daí a possibilidade de resolver, na esfera, problemas análogos aos dois que acabamos de enunciar, fazendo uso apenas do compasso regrado, ou seja, do compasso de abertura fixa, servindo para descrever grandes círculos, e no qual, consequentemente, a distância entre os pontos é a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles, cujos dois lados do ângulo reto são iguais ao raio da esfera.

Dentre as inúmeras consequências que resultam dos teoremas (17 e 18), nos limitaremos a indicar as seguintes;

19. *TEOREMA. Se dois quadriláteros estão inscrito e circunscrito um ao outro de tal modo que as retas determinadas por seus vértices opostos passam todas as quatro por um mesmo ponto; os pontos*

19. *TEOREMA. Se dois ângulos tetraédricos estão inscrito e circunscrito um ao outro, de tal modo que as retas determinadas por suas faces opostas estejam todas as quatro em um mesmo*

*determinados por seus lados opostos pertencerão todos os quatro a mesma linha reta.*

*Demonstração*. Sejam A e B dois vértices do inscrito adjacentes num mesmo lado; e sejam A' e B' seus respectivos opostos. Sejam designados respectivamente por α, β, α', β' os lados do circunscrito que contém os pontos A, B, A', B'; os lados consecutivos do inscrito serão AB, BA', A'B', B'A; e os vértices correspondentes do circunscrito serão αβ, βα', α'β', β'α.

Suponha-se que as duas retas AA' e BB', aquela determinada pelos dois vértices αβ e α'β', e aquela determinada pelos dois vértices αβ' e α'β, passem todas as quatro pelo mesmo ponto P; se, portanto, compara-se o triângulo cujos três vértices são A, B e αβ com aquele cujos três vértices são A', B' e α'β', veremos que, por hipótese, as retas determinadas por seus vértices correspondentes passam todas as três por um mesmo ponto P; donde se conclui (17) que seus lados correspondentes AB e A'B' determinam um ponto em uma linha reta com os dois pontos αα' e ββ'. A comparação do triângulo cujos vértices são A, B' e αβ' com aquele cujos vértices são A', B e α'β provará semelhante que o ponto determinado pelos lados AB' e A'B também está em linha reta com os mesmos dois pontos αα' e ββ'; o que completa a demonstração do teorema.

Raciocinando como já o fizemos (18), conclui-se facilmente a partir disso este outro teorema:

20. *TEOREMA. Se dois ângulos tetraédricos estão inscrito e circunscrito*

*plano; os planos determinados por suas arestas opostas passarão todos os quatro por uma mesma reta.*

*Demonstração*. Sejam A e B duas faces do circunscrito adjacentes em uma mesma aresta; e sejam A' e B' suas respectivas opostos. Sejam designadas respectivamente por α, β, α', β' as arestas do inscrito que estão contidas nos planos A, B, A', B'; as arestas consecutivas do circunscrito serão AB, BA', A'B', B'A; e as faces correspondentes do inscrito serão αβ, βα', α'β', β'α.

Suponha-se que as duas retas AA' e BB', aquela determinada pelas duas faces αβ e α'β', e aquela determinada pelas duas faces αβ' e α'β, estejam todas no mesmo plano P; se, portanto, compara-se o ângulo triédrico cujas três faces são A, B e αβ com aquele cujas três faces são A', B' e α'β', veremos que, por hipótese, as retas determinadas por suas faces correspondentes estão todas as três em um mesmo plano P, donde se conclui (17) que suas arestas correspondentes AB e A'B' determinam um plano cruzando, segundo uma mesma linha reta, os dois planos αα' e ββ'. A comparação do ângulo triédrico cujas faces são A, B' e αβ' com aquele cujas faces são A', B e α'β provará semelhantemente que o plano determinado pelas arestas AB' e A'B cruza, segundo uma mesma linha reta, os dois mesmos planos αα' e ββ'; o que completa a demonstração do teorema.

Raciocinando como já o fizemos (18), conclui-se facilmente a partir disso este outro teorema:

20. *TEOREMA. Se dois quadriláteros estão inscrito e circunscrito um ao outro,*

*um ao outro, de tal sorte que os planos determinados por suas arestas opostas passam todos os quatro por uma mesma reta, as retas determinadas por suas faces opostas pertencerão todas as quatro a um mesmo plano.*

*de tal sorte que os pontos determinados por seus lados opostos pertençam todos os quatro a uma mesma reta; as retas determinadas por seus vértices opostos passarão todas as quatro por um mesmo ponto.*

*Observações*. É mais do que supérfluo observar que em geometria plana seria o n.º 20 (*série à direita*) que corresponderia ao n.º 19 (*série à esquerda*).

É fácil ver que os teoremas incluídos nesses dois números têm seus análogos sobre a esfera, os quais se deduzem dos números 19 (*série à direita*) e 20 (*série à esquerda*), supondo que o vértice comum dos dois ângulos tetraédricos venha a ser o centro de uma esfera.

Este será o lugar muito natural dos dois teoremas do Sr. Coriolis já citados, demonstrados, como o foram, tomo XII, pág. 70. Eles terão seus correspondentes no espaço, dos quais deduzem-se análogos na esfera.

## §. III. *Teoremas sobre os poliedros*.

21. *TEOREMA. Se dois tetraedros estão dispostos no espaço de tal modo que as retas determinadas por seus vértices correspondentes, passam todas as quatro por um mesmo ponto; as retas determinadas por suas faces correspondentes estarão todas as quatro em um mesmo plano.*

*Demonstração*. Vê-se imediatamente (16) que as três arestas de uma mesma face de um dos tetraedros concorrerão, com suas correspondentes no outro, em três pontos que pertencerão a uma mesma reta, determinada pelos planos dessas duas faces; portanto as arestas de um e suas correspondentes no outro concorrerão em seis pontos, distribuídos três a três sobre quatro retas determinadas pelos planos das faces correspondentes; daí é fácil concluir que essas quatro retas pertencerão a um mesmo plano.

22. *TEOREMA. Em qualquer octaedro hexagonal tal que as retas determinadas*

21. *TEOREMA. Se dois tetraedros estão dispostos no espaço de tal modo que as retas determinadas por suas faces correspondentes estejam todas as quatro em um mesmo plano; as retas determinadas por seus vértices correspondentes passarão todas as quatro por um mesmo ponto.*

*Demonstração*. Vê-se imediatamente (16) que as três arestas de um mesmo vértice de um dos tetraedros, com seus correspondentes no outro, determinarão três planos que se cruzam ao longo de uma mesma reta, determinada pelos dois vértices em questão; portanto as arestas de um e suas correspondentes no outro determinarão seis planos, passando três a três pelas quatro retas determinadas pelos vértices correspondentes; daí é fácil concluir que essas quatro retas concorrerão em um mesmo ponto.

22. *TEOREMA. Em qualquer hexaedro octogonal tal que as retas determinadas*

*pelos vértices opostos passam todas as três por um mesmo ponto; as retas determinadas pelas faces opostas pertencem todas as quatro a um mesmo plano*.

*Demonstração*. Vê-se imediatamente (16) que as arestas de uma face qualquer do octaedro e suas opostas na face oposta àquela, concorrerão em três pontos situados em uma mesma reta, determinada pelos planos dessas duas faces; portanto as doze arestas do octaedro concorrerão duas a duas em seis pontos, distribuídos três a três sobre as quatro retas determinadas pelos planos das faces opostas; donde é fácil concluir que essas quatro retas pertencerão a um mesmo plano.

23. Reciprocamente, *TEOREMA. Em qualquer octaedro hexagonal tal que as retas determinadas pelas faces opostas estão todas as quatro num mesmo plano; as retas determinadas pelos vértices opostos passam todas as três por um mesmo ponto.*

*Demonstração*. Estando essas quatro retas em um mesmo plano, cada uma delas contém três de seus seis pontos de interseção, que são, ao mesmo tempo, os pontos de concorrência das arestas opostas; portanto, as três arestas de uma mesma face e suas três opostas na face oposta concorrem em três pontos pertencentes a uma mesma reta; donde se conclui (17, *série da direita*) que as retas determinadas pelos vértices opostos do octaedro passam todas as três por um mesmo ponto.

*Observações*. Os seis pontos de concorrência das arestas opostas do

*pelas faces opostas estão todas as três em um mesmo plano; as retas determinadas pelos vértices opostos passam todas as quatro por um mesmo ponto*.

*Demonstração*. Vê-se imediatamente (16) que as arestas de um vértice qualquer do hexaedro e suas opostas no vértice oposto àquele, determinarão três planos que se cruzam ao longo de uma mesma reta, determinada pelos dois vértices em questão; portanto, as doze arestas do hexaedro determinarão dois a dois seis planos, cruzando-se três a três ao longo das quatro retas determinadas pelos vértices opostos; donde é fácil concluir que essas quatro linhas passarão por um mesmo ponto.

23. Reciprocamente, *TEOREMA. Em qualquer hexaedro octogonal tal que as retas determinadas pelos vértices opostos passam todas as quatro por um mesmo ponto; as retas determinadas pelas faces opostas estão todas as três em um mesmo plano.*

*Demonstração*. Passando essas quatro retas por um mesmo ponto, cada uma delas é a reta comum de três dos seis planos determinados dois a dois, que são, ao mesmo tempo, os planos determinados pelas arestas opostas; portanto, as três arestas do mesmo vértice e suas três opostas no vértice oposto determinam três planos que se cruzam ao longo de uma mesma reta; donde se conclui (17, *série da esquerda*) que as retas determinadas pelas faces opostas do hexaedro estão todas as três em um mesmo plano.

*Observações*. Os seis planos determinados pelas arestas opostas do hexaedro, que se octaedro, distribuídos três a três sobre quatro retas situadas em um mesmo plano, determinam (7) três novas retas, que nada mais são do que as interseções do plano dessas quatro retas com os três planos que contêm duas a duas as retas determinadas pelos vértices opostos do octaedro. Essas novas retas determinam três novos pontos que são aqueles onde esse mesmo plano é perfurado pelas retas determinadas pelos vértices opostos.

Vê-se também que os octaedros hexagonais do tipo que estamos considerando aqui podem, de três maneiras diferentes, ser considerados como a *soma* ou a *diferença* de duas pirâmides quadrangulares de mesma base, conforme os dois vértices estejam em lados *diferentes* ou do *mesmo* lado da base comum.

Uma parte do que precede pode ainda ser enunciada da seguinte maneira:

24. *TEOREMA. Se estão construídos três quadriláteros no espaço, tendo dois a dois, dois vértices opostos comuns e, consequentemente, seis vértices ao todo, de maneira que as retas determinadas por seus vértices opostos, que aqui serão apenas em quantidade de três, passam todas por um mesmo ponto; os pontos determinados por seus lados opostos serão seis pontos distribuídos três a três sobre quatro retas contidas em um mesmo plano. Além disso, esses seis pontos determinarão três novas retas que serão aquelas ao longo das quais seu plano será interceptado pelos planos dos três quadriláteros; e essas novas retas determinarão, por sua vez, três novos pontos, que serão aqueles onde o mesmo*

cruzam três a três ao longo de quatro retas que passando por um mesmo ponto, determinam (7) três novas retas, que nada mais são do que aquelas que ligam o ponto de concorrência dessas quatro retas aos três pontos determinados dois a dois pelas retas de interseções dos planos das faces opostas do hexaedro. Essas novas retas determinam, duas a duas, três novos planos que são aqueles que contêm o ponto de encontro das quatro primeiras retas e as retas que determinadas pelas faces opostas.

Vê-se que os hexaedros octogonais do tipo que estamos considerando aqui podem, de três maneiras diferentes, ser considerados como a *diferença* ou a *soma* de duas pirâmides quadrangulares de mesmo vértice, conforme as duas bases estejam no *mesmo* lado ou em lados *diferentes* do vértice comum.

Uma parte do que precede pode ainda ser enunciada da seguinte maneira:

24. *TEOREMA. Se estão construídos três ângulos tetraédricos no espaço, tendo dois a dois, duas faces opostas comuns e, consequentemente, seis faces ao todo, de maneira que as retas determinadas pelos planos de suas faces opostas, que aqui serão apenas em quantidade de três, estejam todas as três num mesmo plano; os planos determinados por suas arestas opostas serão seis planos que se cruzam três a três ao longo de quatro linhas retas que passam por um mesmo ponto. Além disso, esses seis planos determinarão três novas retas contendo o ponto comum aos quatro primeiros e os vértices dos três ângulos tetraedros; e essas novas retas determinarão, por sua vez, três novos planos, cada um dos quais conterá o ponto*

*plano será perfurado pelas retas determinadas pelos vértices opostos comuns aos três quadriláteros tomados dois a dois.*

Nada impede de supor que os três quadriláteros estão num mesmo plano;[6] e, se então se argumenta como já se fez (18), obtém-se este novo teorema:[7]

25. *TEOREMA. Se constroi-se três ângulos tetraédricos com o mesmo vértice, tendo, dois a dois, duas arestas opostas comuns e, consequentemente, seis arestas ao todo, de maneira que os planos determinados por suas arestas opostas, que aqui serão apenas em quantidade de três, passem por uma mesma reta; as retas determinadas por suas faces opostas serão seis retas distribuídas três a três sobre quatro planos que passam pelo vértice comum dos três ângulos tetraedros. Além disso, essas seis retas determinarão três novos planos, passando também por esse vértice comum; e esses três últimos planos determinarão três novas retas, cada uma das quais estará no plano das arestas opostas de um dos ângulos tetraedros.*

Em particular, este teorema contém o seguinte;

26. *TEOREMA. Em qualquer ângulo hexaédrico tal que os planos determinados por arestas opostas passam todos os três por uma mesma reta; as retas determinadas pelas faces opostas pertencem todas as três a um mesmo plano.*

*comum aos seis primeiros, e uma das retas determinadas pelos planos das faces opostas comuns aos três ângulos tetraédricos tomados dois a dois.*

Nada impede de supor que os três ângulos tetraédricos tenham o mesmo vértice; e, se então se argumenta como já se fez (18), obtém-se este novo teorema:

25. *TEOREMA. Se constroi-se três quadriláteros num mesmo plano, tendo, dois a dois, dois lados opostos comuns e, consequentemente, seis lados ao todo, de maneira que os pontos determinados por seus lados opostos, que aqui serão apenas em quantidade de três, pertencem a uma mesma reta; as retas determinadas por seus vértices opostos serão seis retas que se cortam três a três em quatro pontos do plano desses quadriláteros. Além disso, essas seis retas determinarão três novos pontos desse plano; e esses três pontos determinarão três novas retas, cada uma das quais conterá o ponto determinado por dois lados opostos de um dos quadriláteros.*

Em particular, este teorema contém o seguinte;

26. *TEOREMA. Em qualquer hexágono tal que os pontos determinados por lados opostos pertençam todos os três a uma mesma reta; as retas determinadas pelos vértices opostos passam todas as três pelo mesmo ponto.*

[6] Nota do Autor. Obtém-se assim o teorema cuja demonstração foi solicitada na página 396 do XV.º volume do presente periódico.

[7] Nota do Tradutor. Como foi mencionado na apresentação desta tradução, trata-se aqui de um resultado do tipo "questão resolvida" de uma "questão proposta". Tal questão, indicada pelo editor na sua nota de rodapé acima, também está referendada na bibliofgrafia da apresentação desta tradução: (QUESTIONS PROPOSÉES, 1825).

Então, raciocinando como já o fizemos (18);

Então, raciocinando como já o fizemos (18);

27. *TEOREMA. Em qualquer hexágono tal que as retas determinadas pelos vértices opostos passam todas as três pelo mesmo ponto; os pontos determinados pelos lados opostos pertencem todos os três a uma mesma reta.*

27. *TEOREMA. Em qualquer ângulo hexaédrico tal que as retas determinadas pelas faces opostas pertençam todas as três a um mesmo plano; os planos determinados pelas arestas opostas passam todos os três por uma mesma reta.*

Na Geometria plana, seria o n.º 26 (*série à direita*) que corresponderia ao n.º 27 (*série à esquerda*).

28. *TEOREMA. Em qualquer hexágono torcido*[8] *tal que seus lados opostos estejam dois a dois em três planos; as retas determinadas pelos vértices opostos passam todas as três por um mesmo ponto, a interseção desses três planos.*[9]

28. *TEOREMA. Em qualquer hexágono torcido tal que seus lados opostos concorrem dois a dois em três pontos; as retas determinadas pelos planos dos ângulos opostos estão todas as três em um mesmo plano, determinado por esses três pontos.*[10]

*Demonstração*. Se, de fato, liga-se por retas cada vértice aos dois que não lhe são opostos tem-se então doze retas que podem ser consideradas como as doze arestas de um octaedro hexagonal do tipo já discutido (21 e seguintes). Ora, as retas determinadas pelos vértices opostos do hexágono torcido nada mais serão do que as retas determinadas pelos vértices opostos do octaedro; de onde se segue que essas três retas passarão por um mesmo

*Demonstração*. Se, de fato, considera-se as interseções do plano de cada ângulo com os planos dos dois ângulos que não lhe são opostos, tem-se então doze retas que podem ser consideradas como as doze arestas de um hexaedro octogonal do tipo já discutido (21 e seguintes). Ora, as retas determinadas pelos planos dos ângulos opostos do hexágono torcido nada mais serão do que as retas determinadas pelas faces opostas do hexaedro, de onde se

[8] Nota do Tradutor. Uma curva é chamada de *torcida* quando não pode ser contida em nenhum plano. No contexto dos artigos de geometrias publicados nos *Annales de Gergonne* (1810-1832), a palavra utilizada pelos geômetras era *gauche*. Em meus trabalhos opto por traduzir para "torcida", pegando carona no vocabulário "torção", já bem estabelecido em textos brasileiros de geometria diferencial.

[9] Nota do Autor. Reconhece-se aqui os dois teoremas dos quais o Sr. Dandelin fez tão bom uso (volume XV, pag 393).

[10] Nota do Tradutor. O artigo mencionado por Gergonne é assinado pelo geômetra neerlandês Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) que foi ex aluno da Escola Politécnica e membro da Academia Real de Ciências de Bruxelas. A referência para o texto pode ser encontrada na bibliografia da apresentação desta tradução: (DANDELIN, 1825).

ponto.

segue que essas três retas pertencerão a um mesmo plano.

*Observações*. Poderíamos tratar aqui do icosaedro dodecagonal e do dodecaedro icosagonal, nos quais as retas determinadas pelos vértices opostos passam pelo mesmo ponto, ou nos quais as retas determinadas pelos planos das faces opostas pertencem a um mesmo plano. Poderíamos a seguir tratar da inscrição e da circunscrição do tetraedro a si mesmo, do octaedro hexagonal ao hexaedro hexagonal,[11] e do icosaedro dodecagonal ao dodecaedro icosagonal. Poderíamos, enfim, situar aqui o artigo sobre as leis gerais que regem os poliedros, mencionado no início deste memorial, bem como uma grande parte do artigo da página 321 do volume IX.[12]

Algumas pessoas poderão achar que o que se expôs acima carece de desenvolvimento; mas pedimos-lhes que notem que não estamos escrevendo para iniciantes, e que deve ter nos parecido preferível multiplicar os pontos de comparação do que entrar em alguns deles com minuciosos detalhes que qualquer leitor, ainda que pouco versado em geometria, poderá facilmente preencher. Cremos ter dito o suficiente para colocar fora de qualquer contestação esses dois pontos da filosofia matemática, a saber, 1º. que há uma parte bastante notável da geometria em que os teoremas se correspondem exatamente dois a dois, bem como a argumentação que se deve fazer para estabelecê-los, e isso em virtude da própria natureza da extensão; 2º. que esta parte da geometria, que ganharia uma ampliação muito grande, caso se quisesse incluir ali as linhas e as superfícies curvas,[13] pode ser completamente desenvolvida independentemente do cálculo e do conhecimento de qualquer uma das propriedades métricas das grandezas consideradas.

---

[11] Nota do Tradutor. Registro "hexaedro hexagonal" que é a expressão que aparece no texto original, embora o curso da argumentação indique que provavelmente Gergonne queria ter dito "hexaedro octogonal".

[12] Nota do Tradutor. O artigo aqui referido simplesmente como "o da página 321 do volume IX" é publicado por uma assinante anônimo e sua referência encontra-se na bibliografia da apresentação desta tradução: (ANÔNIMO, 1819).

[13] Nota do Autor. Eis aqui como se poderia começar nesta parte da geometria relativa às linhas e superfícies curvas.

*Definição*. Considere-se no espaço um plano fixo e três retas, não situadas duas a duas num mesmo plano; e conceba uma reta móvel constantemente apoiada sobre as três retas fixas. Esta reta móvel e o plano fixo determinarão uma série de pontos; e a curva plana que incluirá todos eles será o que se chama de *uma linha de segunda ordem*.

*Definição*. Considere-se no espaço um ponto fixo e três retas fixas, não concorrentes duas a duas num mesmo ponto; e conceba uma reta móvel constantemente apoiada nas três retas fixas. Esta reta móvel e o ponto fixo determinarão uma série de planos, e a superfície cônica à qual todos eles serão tangentes será o que se chama de *uma superfície cônica de segunda ordem*.

*TEOREMA. Qualquer superfície cônica que passa por uma linha de segunda ordem é uma superfície cônica de segunda ordem.*

*TEOREMA. Qualquer seção plana feita em uma superfície cônica de segunda ordem é uma linha de segunda ordem.*

*Demonstração*. Etc., etc.

*Demonstração*. Etc., etc.

Parece-nos que um ponto de doutrina de tamanha importância, que nos impressionou pela primeira vez há mais de dez anos, e que o espírito do detalhe até então havia ocultado à vista dos geômetras, não deveria permanecer por mais tempo sem ser trazido plenamente à tona. Receamos, porém, que o que acabamos de escrever passe despercebido ou que, pelo menos após um exame superficial, muitos vejam nele apenas uma daquelas comparações forçadas que só têm consistência no espírito de quem as imagina.

**3. Texto original**

**GÉOMÉTRIE DE SITUATION. PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.**
**Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue.**

*Tom. XVI, n.º VI, 1.er janvier* 1826.

Par M. Gergonne.

Tantum series juncturaque pollet. (Hor.)

Les diverses théories dont se compose le domaine de la science de l'étendue peuvent être rangées en deux classes très-distinctes. Il est, en effet, certaines de ces théories qui dépendent essentiellement des *relations métriques* qui se trouvent exister entre les diverses portions d'étendue que l'on compare, et qui conséquemment ne sauraient être établies qu'à l'aide des principes du calcul. D'autres, au contraire, sont tout-à-fait indépendantes de ces mêmes relations, et résultent uniquement de la *situation* que se trouvent avoir les uns par rapport aux autres, les êtres géométriques sur lesquels on raisonne; et, bien que très-souvent on les déduise des proportions et du calcul, on peut toujours, en s'y prenant d'une manière convenable, les en dégager complètement. Mais il peut quelquefois devenir nécessaire pour cela de passer tour à tour de la géométrie plane à celle de l'espace et de celle-ci à la première, comme Monge et les géomètres de son école l'ont si souvent pratiqué, et avec tant de succès.

Il est donc raisonnablement permis de se demander, d'après cela, si notre manière de diviser la géométrie en *géométrie plane* et *géométrie de l'espace* est aussi naturelle et aussi exactement conforme à l'essence des choses que vingt siècles d'habitude ont pu nous le persuader. Toujours du moins demeure-t-il vrai qu'en y renonçant on parviendrait, en ne recourant, pour ainsi dire, qu'à la simple intuition, à pousser assez avant dans la géométrie des commençans que l'étude du calcul, présentée dès l'entrée, ne rebute que trop souvent, et qui peut-être s'y livreraient plus tard avec beaucoup moins de répugnance, lorsque leur intelligence se serait agrandie et fortifiée, par l'étude d'une série plus ou moins prolongée de propriétés de l'étendue.

Mais un caractère extrêmement frappant de cette partie de la géométrie qui ne dépend aucunement des relations métriques entre les parties des figures ; c'est qu'à l'exception de quelques théorèmes symétriques d'eux-mêmes, que le théorème d'Euler sur les polyèdres, et son analogue sur les polygones, tous les théorèmes y sont doubles ; c'est-à-dire que, dans la géométrie plane, à chaque théorème il en répond toujours nécessairement un autre qui s'en déduit en y échangeant simplement entre eux les deux mot *points* et *droites* ; tandis que, dans la géométrie de l'espace, ce sont les mots *points* et *plans* qu'il faut échanger entre eux pour passer d'un théorème à son corrélatif.

Parmi un grand nombre d'exemples que nous pourrions puiser, dans le présent recueil, de cette sorte de *dualité* des théorèmes qui constituent la *géométrie de situation*, nous nous bornerons à indiquer, comme les plus remarquables, les deux élégans théorèmes de M. Coriolis, démontrés d'abord à la page 326 du XI.e volume, puis à la page 69 du XII.e, et l'article que nous avons-nous même publié à la page 157 du précédent volume, sur les lois générales qui régissent les polyèdres. C'est, au surplus, une suite inévitable des propriétés des pôles, polaires, plans polaires et polaires conjuguées des lignes et surfaces du second ordre, qui jouent ici un rôle assez analogue à celui que joue le triangle supplémentaire, dans la trigonométrie sphérique où, comme il a été montré, dans tout le cours de l'intéressant mémoire de M. Sorlin (tom. XV, pag. 273), les théorèmes peuvent également être répartis en en deux séries parallèles, de manière à se correspondre deux à deux, avec la plus grande exactitude.

Toutefois, quelque digne de remarque que puisse être un fait géométrique de cette importance, et quelque ressource qu'il puisse offrir, dans un grand nombre de cas, pour faire devenir, en quelque sorte, de nouveaux théorèmes, à peine a-t-il été entrevu, même par les géomètres qui, dans ces derniers temps, se sont le plus spécialement occupés de la recherche des propriétés de l'étendue ; tant est peu philosophique encore, même de nos jours, la manière d'étudier les sciences.

Voilà ce qui nous détermine à faire de cette sorte de géométrie *en partie doubles*, s'il est permis de s'exprimer ainsi, le sujet d'un écrit spécial dans lequel, après avoir rendu manifeste le fait philosophique dont il s'agit, dans l'exposé même des premières notions, nous nous en appuyerons, soit pour démontrer quelque théorèmes nouveaux, soit pour donner de quelques théorèmes déjà connus des démonstrations nouvelles, qui les rendent à l'avenir tout à fait indépendans des relations métriques desquelles on a été jusqu'ici dans l'usage de les déduire.

Nous pourrions fort bien nous borner à démontrer seulement une moitié de nos théorèmes, et à en déduire l'autre moitié, à l'aide de la théorie des pôles. Mais nous préférons les démontrer directement les uns et les autres, tant pour ne pas sortir des premiers élémens et rendre ce qu'on va livrer accessible à ceux là-même qui ne connaissent pas les *Elémens d'Euclide*, que pour avoir l'occasion de faire remarquer qu'il existe entre les démonstrations de deux théorèmes d'une même couple la même correspondance qu'entre leurs énoncés. Nous aurons même soin, afin de rendre cette correspondance plus apparente, de présenter les théorèmes analogues dans deux colonnes, en regard l'une de l'autre, comme nous en avons déjà usé, dans l'article sur les polyèdres rappelé plus haut ; de telle sorte que les démonstrations puissent se servir réciproquement de contrôle.

Nous croyons superflu d'accompagner ce mémoire de figures, souvent plus embarrassantes qu'utiles, dans la géométrie de l'espace ; figures que nous ne pourrions d'ailleurs offrir que sous un aspect unique et individuel au lecteur qui pourra, au contraire, les construire et façonner à son gré, si toutefois il en juge le secours nécessaire. Il ne s'agit ici, en effet, que de déductions logiques, toujours faciles à suivre, lorsque les notations sont choisies d'une manière convenable.

### §. I. *Notions préliminaires*.

| | |
|---|---|
| 1. Deux points, distincts l'un de l'autre, donnés dans l'espace, déterminent une droite indéfinie qui, lorsque ces deux points sont désignés par A et B, peut être | 1. Deux plans, non parallèles, donnés dans l'espace, déterminent une droite indéfinie qui, lorsque ces deux plans sont désignés par A et B, peut être elle-même désignée |

elle-même désignée par AB.

2. Trois points donnés dans l'espace, ne se confondant pas deux à deux et n'appartenant pas à une même ligne droite, déterminent un plan indéfini qui, lorsque ces trois points sont respectivement désignés par A, B, C peut être lui-même désigné par ABC.

3. Un plan peut aussi être déterminé dans l'espace par une droite et par un point qui ne s'y trouve pas contenu, ou encore par deux droites qui concourent en un même point.

4. Ce n'est qu'accidentellement que des points, au nombre de plus de trois, dans l'espace, déterminent un plan unique, que l'on peut alors désigner par la totalité des lettres qui désignent ces différens points. Ce n'est aussi qu'accidentellement que deux droites, et à plus forte raison un plus grand nombre, sont dans un même plan.

5. Généralement parlant, des points en nombre *n*, déterminent, dans l'espace, des droites au nombre de

$$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2},$$

et des plans au nombre de

$$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}.$$

Ce n'est qu'accidentellement qu'ils en déterminent un moindre nombre.

6. Si l'on peut prouver de plus de deux droites que, sans passer toutes par un même point, deux d'entre elles, de quelque manière qu'on les choisisse, sont toujours

par AB.

2. Trois plans, non parallèles deux à deux dans l'espace, et ne passant pas par une même ligne droite, déterminent un point qui, lorsque ces trois plans sont respectivement désignés par A, B, C, peut être lui-même désigné par ABC.

3. Un point peut aussi être déterminé dans l'espace par une droite et un plan dans lequel elle ne se trouve pas située, ou encore par deux droites situées dans un même plan.

4. Ce n'est qu'accidentellement que des plans, au nombre de plus de trois, dans l'espace, déterminent un point unique, que l'on peut alors désigner par la totalité des lettres qui désignent ces différens plans. Ce n'est aussi qu'accidentellement que deux droites, et à plus forte raison un plus grand nombre concourent en un même point.

5. Généralement parlant, des plans en nombre *n*, déterminent, dans l'espace, des droites au nombre de

$$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2},$$

et des points au nombre de

$$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}.$$

Ce n'est qu'accidentellement qu'ils en déterminent un moindre nombre.

6. Si l'on peut prouver de plus de deux droites que, sans être toutes dans un même plan, deux d'entre elles, de quelque manière qu'on les choisisse, concourent

dans un même plan, on en pourra conclure qu'elles sont toutes situées dans un plan unique.

toujours en un même point, on en pourra conclure qu'elles concourent toutes en un point unique.

7. Quatre droites, comprises dans un même plan, déterminent, en général, six points, distribués trois à trois sur ces quatre droites. Ces six points déterminent trois nouvelles droites qui, à leur tour, déterminent trois nouveaux points.

7. Quatre droites issues d'un même point de l'espace, déterminent, en général, six plans, passant trois à trois par ces quatre droites. Ces six plans déterminent trois nouvelles droites qui à leur tour, déterminent trois nouveaux plans.

9. Des points, en nombre quelconque, situés dans un même plan, peuvent être considérés comme les *sommets* d'un polygone, dont les *côtés* sont déterminés par ces mêmes points, pris consécutivement deux à deux, et dans un ordre quelconque, du premier au dernier et de celui-ci au premier.

9. Des plans, en nombre quelconque, issus d'un même point de l'espace, peuvent être considérés comme les *faces* d'un angle polyèdre, dont les *arêtes* sont déterminées par ces mêmes plans, pris consécutivement, deux à deux, et dans un ordre quelconque, du premier au dernier et de celui-ci au premier.

10. Des droites, en nombre quelconque, issues d'un même point de l'espace, peuvent être considérées comme les *arêtes* d'un angle polyèdre, dont les *faces* sont déterminées par ces mêmes droites, prises consécutivement deux à deux, et dans un ordre quelconque, de la première à la dernière, et de celle-ci à la première.

10. Des droites, en nombre quelconque, situées dans un même plan, peuvent être considérées comme les *côtés* d'un polygone, dont les *sommets* sont déterminés par ces mêmes droites, prises consécutivement deux à deux, et dans un ordre quelconque, de la première à la dernière, et de celle-ci à la première.

11. Un polygone qui a autant de côtés qu'un autre a de sommets est dit *circonscrit* à celui-ci, lorsque, ces deux polygones étant situés dans un même plan, les sommets du dernier sont respectivement situés sur les directions des côtés du premier.

11. Un angle polyèdre qui a autant d'arêtes qu'un autre a de faces, est dit *inscrit* à celui-ci, lorsque, ces deux angles polyèdres ayant même sommet, les plans des faces du dernier contiennent respectivement les arêtes du premier.

12. Un angle polyèdre qui a autant de faces qu'un autre a d'arêtes, est dit *circonscrit* à celui-ci, lorsque, ces deux angles polyèdres ayant même sommet, les arêtes du dernier sont respectivement dans les plans des faces du premier.

12. Un polygone qui a autant de sommets qu'un autre a de côtés, est dit *inscrit* à celui-ci, lorsque, ces deux polygones étant situés dans un même plan, les directions des côtés du dernier contiennent respectivement les sommets du premier.

13. Un polygone est dit *inscrit* à un angle polyèdre qui a autant d'arêtes que ce polygone a des sommets, lorsque les sommets du polygone sont respectivement sur les arêtes de l'angle polyèdre.

13. Un angle polyèdre est dit *circonscrit* à un polygone qui a autant de côtés que cet angle polyèdre a des faces, lorsque les faces de l'angle polyèdre contiennent respectivement les côtés du polygone.

14. Des points, en nombre quelconque, dans l'espace, peuvent être considérés comme les *sommets* d'un polyèdre. Ceux de ces points qui appartiennent à un même plan déterminent les *faces* du polyèdre, dont les *arêtes* sont les côtés de ces mêmes faces.

14. Des plans, en nombre quelconque, dans l'espace, peuvent être considérés comme les *faces* d'un polyèdre. Ceux de ces plans qui passent par un même point déterminent les *sommets* du polyèdre, dont les *arêtes* sont celles de ces mêmes sommets.

15. Un polyèdre qui a autant de faces qu'un autre a de sommets, est dit *circonscrit* à celui-ci, lorsque les sommets du dernier sont respectivement dans les plans des faces du premier.

15. Un polyèdre qui a autant de sommets qu'un autre a de faces, est dit *inscrit* à celui-ci, lorsque les plans des faces du dernier contiennent respectivement les sommets du premier.

Remarque. Dans ce qui précède, nous avons disposé les propositions, en regard les uns des autres, comme elles doivent l'être dans la géométrie à trois dimensions, et nous en userons de même dans tout ce qui va suivre. Dans la géométrie plane, leur correspondance serait un peu différente. Alors, par exemple, la proposition 8 de la série de droite devrait correspondre à la proposition 7 de la série de gauche.

Les géomètres ayant remarqué que les droites que déterminent deux sommets non consécutifs d'un polygone ou d'un polyèdre, ainsi que les plans que déterminent deux arêtes non consécutives d'un angle polyèdre, jouaient un rôle assez important en géométrie, ont cru utile de leur donner des dénominations particulières, et ils les ont appelés *diagonales* et *plans diagonaux*. Mais les points que déterminent deux côtés non consécutifs d'un polygone ; mais les droites que déterminent les plans de deux faces non consécutives, soit d'un polyèdre soit d'un angle polyèdre, ne sont pas d'une moindre importance, et pourtant on ne leur a assigné aucune dénomination spéciale. On n'aurait sans doute pas manqué de le faire, si les relations que nous nous efforçons ici de faire ressortir avaient été aperçues par les créateurs de la science ; ce qui prouve, pour le dire en passant, que ce n'est seulement que lorsqu'une science est déjà parvenue en un assez haut degré de maturité qu'on peut espérer d'en bien faire la langue. Quoi qu'il en soit, plutôt que de créer des dénominations nouvelles, qui pourraient fort bien ne pas plaire également à tous les lecteurs, nous préférons nous interdire ici l'usage des mots diagonales el plans diagonaux, qui manqueraient d'analogues, et les remplacer constamment par la périphrase équivalente.

Souvent à l'avenir, de ce que deux droites seront situées dans un même plan, il nous arrivera de conclure qu'elles concourent en un même point ; mais il faudra alors sous-entendre que ce point peut fort bien être infiniment éloigné.

## §. II. *Théorèmes sur les triangles, les quadrilatères, les angles trièdres et les angles tétraèdres*.

16. *THÉORÈME. Si deux triangles sont tellement situés dans l'espace que les droites que déterminent leurs sommets correspondans concourent toutes trois au même point ; leurs côtés correspondans concourront en trois points qui appartiendront à une même ligne droite.*

16. *THÉORÈME. Si deux angles trièdres sont tellement situés dans l'espace que les droites que déterminent leurs faces correspondantes soient toutes trois situées dans un même plan ; leurs arêtes correspondantes détermineront trois plans qui se couperont suivant une même ligne droite.*

*Démonstration*. Soient A, B, C les trois sommets de l'un des triangles, et A', B', C' leurs correspondans respectifs dans l'autre, de manière que les droites AA', BB', CC' concourent en um même point P.

*Démonstration*. Soient A, B, C les trois faces de l'un des angles trièdres, et A', B', C' leurs correspondantes respectives dans l'autre, de manière que les droites AA', BB', CC' soient situées dans un même plan P.

Les deux droites AA', BB', concourant en un même point P, sont dans un même plan, qui contiendra conséquemment les quatre points A, A', B, B' ; donc les droites AB et A'B' sont dans ce plan, et doivent, par suit, concourir en un point. Ainsi, deux côtés correspondans quelconques, dans les deux triangles, concourent en un point.

Les deux droites AA', BB' étant situées dans un même plan P, concourent en un même point, où concourront conséquemment les quatre plans A, A', B, B', donc les droites AB et A'B' concourent aussi en ce point, et par suite sont dans un même plan. Ainsi, deux arêtes correspondantes quelconques, dans les deux angles trièdres, son situées dans un même plan.

Soient respectivement α, β, γ les points de concours de côtés correspondans BC et B'C', CA et C'A', AB et A'B', des deux triangles. Parce que ces points sont situés sur les directions des trois côtes du triangle ABC, ils doivent être dans le plan de ce triangle ; mais, parce qu'ils sont situés sur les directions des trois côtés di triangle A'B'C', ils doivent être aussi dans le plan de ce dernier triangle ; donc les trois points α, β, γ se trouvent à la fois dans deux plans ; donc ils appartiennent à l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire, à une ligne droite.

Soient respectivement α, β, γ les plans qui contiennent les arêtes correspondantes BC et B'C', CA et C'A', AB et A'B' des deux angles trièdres. Parce que ces plans contiennent les trois arêtes de l'angle trièdre ABC, ils doivent concourir à son sommet ; mais, parce qu'ils contiennent les trois arêtes de l'angle trièdre A'B'C', ils doivent aussi concourir au sommet de ce dernier angle trièdre ; donc les trois plans α, β, γ passent à la fois par les deux mêmes points ; donc ils contiennent tous trois la droite que déterminent ces deux points ; c'est-à-dire, qu'ils se coupent tous trois suivant la même droite.

Si l'on conçoit que le point de concours de trois droites que déterminent les sommets correspondans des deux triangles s'approche sans cesse du plan de l'un d'eux ; le plan de l'autre fera avec le sien un angle sans cesse décroissant, jusqu'à ce qu'enfin ces deux plans se confondront en un seul, contenant le point dont il s'agit ; et comme, dans ce mouvement, les trois points α, β, γ n'auront pas cessé d'appartenir à une même ligne droite ; il en résulte le théorème suivant :

Si l'on conçoit que le plan de trois droites que déterminent les faces correspondantes des deux angles trièdres s'approche sans cesse du sommet de l'un d'eux, la distance de ce sommet au sommet de l'autre ira sans cesse en décroissant, jusqu'à ce qu'enfin ces deux sommets se confondront en un seul point, situé dans le plan dont il s'agit ; et comme, dans ce mouvement, les trois plans α, β, γ n'auront pas cessé de se couper suivant une même droite, il en résulte le théorème suivant :

17. *THÉORÈME. Si deux triangles, situés dans un même plan, sont tels que les droites que déterminent leurs sommets correspondans passent toutes trois par un même point ; les points que détermineront leurs côtés correspondans appartiendront tous trois à une même droite.*

17. *THÉORÈME. Si deux angles trièdres de même sommet sont tels que les droites que déterminent leurs faces correspondantes soient toutes trois dans un même plan, les plans que détermineront leurs arêtes correspondantes se couperont tous trois suivant une même droite.*

18. Donc, *THÉORÈME. Si deux angles trièdres de même sommet sont tels que les plans que déterminent leurs arêtes correspondantes passent tous trois par une même droite ; les droites que détermineront leurs faces correspondantes seront toutes trois dans un même plan.*

18. Donc, *THÉORÈME. Si deux triangles situés dans un même plan, sont tels que les point que déterminent leurs côtés correspondans appartiennent tous trois à une même droite, les droites que détermineront leurs sommets passeront toutes trois par un même point.*

*Démonstration*. Si, en effet, on coup les deux angles trièdres par un même plan, qui ne passe pas par leur sommet commun, les sections seront deux triangles, dans le cas de la proposition ci-dessus (17) ; d'où il résulte évidemment doivent jouir de la propriété annoncée.

*Démonstration*. Si, en effet, on considère ces deux triangles comme les sections, par um même plan, de deux angles trièdres, ayant um même sommet hors de ce plan, ces deux angles trièdres se trouveront dans le cas de la proposition ci-dessus (17) ; d'où il résulte évidemment que les deux triangles doivent jouir de la propriété annoncée.

*Remarques.* La correspondance entre ces divers théorèmes est ici telle que l'exige la géométrie de l'espace. Dans la géométrie plane, au contraire, le numéro 18 (*série de droite*) répondrait ai numéro 17 (*série de gauche*).

Les théorèmes compris sous ces deux numéros, susceptibles de revêtir une multitude de formes différents, et desquels on en peut déduire un grand nombre d'autres, sont fondamentaux, dans la *géométrie de la règle*. Ils offrent, en particulier, les méthodes les plus simples qu'on puisse employer, pour la résolution des deux problèmes suivans, se correspondant l'un à l'autre, dans la géométrie plane: **I.** *Deux points déterminant une droite inconnue, qu'un obstacle empêche de tracer, trouver sur une droite donnée, EN NE FAISANT USAGE QUE DE LA RÈGLE, un troisième point de cette droite*? **II.** *Un point inconnu devant être déterminé par deux droites, qu'un obstacle empêche de prolonger, mener, par un point donné, EN NE FAISANT USAGE QUE DE LA RÈGLE, une troisième droite qui passe par ce point*?

Si l'on suppose (17, *série de droite* et 18, *série de gauche*) que le sommet commun des deux angles trièdres devient le centre d'une sphère de rayon quelconque, on obtiendra, sur la sphère des théorèmes analogues aux théorèmes 17 (*série de gauche*) et 18 (*série de droite*), dans lesquels les droites se trouveront remplacées par des arcs de grands cercles. On en conclura la possibilité de résoudre, sur la sphère, des problèmes analogues aux deux que nous venons d'énoncer, en ne faisant usage que du compas règle, c'est-á-dire, du compas à ouverture fixe, servant à décrire des grands cercles, et dans lequel, conséquemment, la distance entre les points est l'hypothénuse d'un triangle isocèle rectangle, dont les deux côtés de l'angle droit sont égaux au rayon de la sphère.

Parmi les nombreuses conséquences qui résultent des théorèmes (17 et 18), nous nous bornerons à signales les suivantes;

| | |
|---|---|
| 19. *THÉORÈME. Si deux quadrilatères sont inscrit et circonscrit l'un à l'autre de telle sorte que les droites que déterminent leurs sommets opposés passent toutes quatre par un même point; les points que détermineront leurs côtés opposés appartiendront tous quatre à une même ligne droite.* | 19. *THÉORÈME. Si deux angles tétraèdres sont inscrit et circonscrit l'un à l'autre, de telle sorte que les droites que déterminent leurs faces opposées soient toutes quatre dans un même plan; les plans que détermineront leurs arêtes opposées passeront tous quatre par une même droite.* |
| *Démonstration*. Soient A et B deux sommets de l'inscrit adjacens à un même côté ; et soient A' et B' leurs opposés respectifs. Soient désignés respectivement par α, β, α', β', les côtés du circonscrit qui contiennent les points A, B, A', B' ; les côtés consécutifs de l'inscrit seront AB, BA', A'B', B'A; et les sommets correspondans du circonscrit seront αβ, βα', α'β', β'α. | *Démonstration*. Soient A et B deux faces du circonscrit adjacentes à une même arête; et soient A' et B' leurs opposées respectives. Soient désignées respectivement par α, β, α', β' les arêtes de l'inscrite qui sont contenues dans les plans A, B, A', B' ; les arêtes consécutives du circonscrit seront AB, BA', A'B', B'A; et les faces correspondantes de l'inscrit seront αβ, βα', α'β', β'α. |
| On suppose que les deux droites AA' et BB', celle que déterminent les deux | On suppose que les deux droites AA' et BB', celle que déterminent les deux faces |

sommets αβ et α'β', et celle que déterminent les deux sommets αβ' et α'β, passent toutes quatre par un même point P ; si donc l'on compare le triangle dont les trois sommets sont A, B et αβ à celui dont les trois sommets sont A', B' et α'β', on verra que, par l'hypothèse, les droites que déterminent leurs sommets correspondans passent toutes trois par un même point P; d'où l'on conclura (17) que leurs côtés correspondans AB et A'B' déterminent un point en ligne droite avec les deux points αα' et ββ'. La comparaison du triangle dont les sommets sont A, B' et αβ' à celui dont les sommets sont A', B et α'β prouvera semblablement que le pont déterminé par les côtés AB' et A'B est aussi en ligne droite avec les deux mêmes points αα' et ββ' ; ce qui complète la démonstration du théorème.

αβ et α'β', et celle que déterminent les deux faces αβ' et α'β, sont toutes quatre dans un même plan P; Si donc l'on compare l'angle trièdre dont les trois faces sont A, B et αβ à celui dont les trois faces sont A', B' ; et α'β', on verra que, par l'hypothèse, les droites que déterminent leurs faces correspondantes sont toutes trois dans un même plan P, d'où l'on conclura (17) que leurs arêtes correspondantes AB et A'B' déterminent un plan coupant, suivant une même ligne droite, les deux plans αα' et ββ'. La comparaison de l'angle trièdre dont les faces sont A, B' et αβ' à celui dont les faces sont A', B et α'β prouvera semblablement que le plan déterminé par les arêtes AB' et A'B coupe, suivant une même droite, les deux même plans αα et ββ ; ce qui complète la démonstration du théorème.

En raisonnant comme nous l'avons fait (18), on conclura facilement de là cet autre théorème :

En raisonnant comme nous l'avons fait (18), on conclura facilement de là cet autre théorème :

20. *THÉORÈME. Si deux angles tétraèdres sont inscrits et circonscrites l'un à l'autre, de telle sorte que les plans que déterminent leurs arêtes opposées passent tous quatre par une même droite, les droites que détermineront leurs faces opposées appartiendront toutes quatre à un même plan.*

20. *THÉORÈME. Si deux quadrilatères sont inscrits et circonscrites l'un à l'autre, de telle sorte que les points que déterminent leurs côtés opposés appartiennent tous quatre à une même droite ; les droites que détermineront leurs sommets opposés passeront toutes quatre par un même point.*

*Remarques*. Il est plus que superflu d'observer qu'en géométrie plane ce serait le n.º 20 (*série de droite*) qui correspondrait au n.º 19 (*série de gauche*).

Il est facile de voir que les théorèmes compris sous ces deux numéros ont leurs analogues sur la sphère, lesquels se déduiront des numéros 19 (*série de droite*) et 20 (*série de gauche*), en supposant que le sommet commun des deux angles tétraèdres devient le centre d'une sphère.

Ce sera ici le lieu très-naturel des deux théorèmes de M. Coriolis déjà cités, démontrés, comme ils l'ont été, tom. XII, pag. 70. Ils auront leurs correspondans dans l'espace, desquels on en déduira d'analogues sur la sphère.

**§. III.** ***Théorèmes sur les polyèdres*.**

21. *THÉORÈME. Si deux tétraèdres sont tellement disposés dans l'espace que les droites que déterminent leurs sommets correspondans passent toutes quatre par un même point; les droites que détermineront leurs faces correspondantes seront toutes quatre dans un même plan.*

*Démonstration*. On voit d'abord (16) que les trois arêtes d'une même face de l'un des tétraèdres concourront avec leurs correspondantes dans l'autre en trois points qui appartiendront à une même ligne droite, déterminée par les plans de ces deux faces; donc les arêtes de l'un et leurs correspondantes dans l'autre concourront en six points, distribués trois à trois sur les quatre droites déterminées par les plans des faces correspondantes; d'où il est facile de conclure que ces quatre droites appartiendront à un même plan.

22. *THÉORÈME. Dans tout octaèdre hexagone tel que les droites que déterminent les sommets opposés passent toutes trois par un même point; les droites que déterminent les faces opposées appartiennent toutes quatre à un même plan.*

*Démonstration*. On voit d'abord (16) que les arêtes d'une face quelconque de l'octaèdre et leurs opposées, dans la face opposée à celle-là, concourront en trois points, situés dans une même ligne droite, déterminée par les plans de ces deux faces; donc les douze arêtes de l'octaèdre concourront deux à deux en six points, distribués trois à trois sur les quatre droites déterminées par les plans des faces opposées; d'où il est aisé de conclure que

21. *THÉORÈME. Si deux tétraèdres sont tellement disposés dans l'espace que les droites que déterminent leurs faces correspondantes soient toutes quatre dans un même plan ; les droites que détermineront leurs sommets correspondans passeront toutes quatre par um même point.*

*Démonstration*. On voit d'abord (16) que les trois arêtes d'un même sommet de l'un des tétraèdres, avec leurs correspondantes dans l'autre détermineront trois plans se coupant suivant une même droite, déterminée par les deux sommets dont il s'agit; donc les arêtes de l'un et leurs correspondantes dans l'autre détermineront six plans, passant trois à trois par les quatre droites déterminées par les sommets correspondans; d'où il est facile de conclure que ces quatre droites concourront en un même point.

22. *THÉORÈME. Dans tout hexaèdre octogone tel que les droites que déterminent les faces opposées sont toutes trois dans un même plan; les droites que déterminent les sommets opposés passent toutes quatre par un même point.*

*Démonstration*. On voit d'abord (16) que les arêtes d'un sommet quelconque de l'hexaèdre et leurs opposées, du sommet opposé à celui-là, détermineront trois plans se coupant suivant une même ligne droite, déterminée par les deux sommets dont il s'agit; donc les douze arêtes de l'hexaèdre détermineront deux à deux six plans, se coupant trois à trois suivant les quatre droites déterminées par les sommets opposés; d'où il est aisé de conclure que ces quatre droites appartiendront à un même plan.

23. Réciproquement, *THÉORÈME. Dans tout octaèdre hexagone tel que les droites que déterminent les faces opposées sont toutes quatre dans un même plan; les droites que déterminent les sommets opposés passent toutes trois par un même point.*

*Démonstration*. Ces quatre droites étant dans un même plan, chacune d'elles contient trois de leurs six points d'intersection, lesquels sont, en même temps, les points de concours des arêtes opposées; donc les trois arêtes d'une même face et leurs trois opposées dans la face opposée concourent en trois points appartenant à une même droite;  d'où l'on doit conclure (17, *série de droite*) que les droites que déterminent les sommets opposés de l'octaèdre passent toutes trois par un même point.

*Remarques*. Les six points de concours des arêtes opposées de l'octaèdre, distribués trois à trois sur quatre droites situées dans un même plan, déterminent (7) trois nouvelles droites, lesquelles ne sont autre chose que les intersections du plan de ces quatre droites avec les trois plans qui contiennent deux à deux les droites que déterminent les sommets opposés de l'octaèdre. Ces nouvelles droites déterminent trois nouveaux points qui sont ceux où ce même plan est percé par les droites que déterminent les sommets opposés.

On voit aussi que les octaèdres hexagones du genre de ceux que nous considérons ici peuvent, de trois manières différentes, être

ces quatre droites passeront par un même point.

23. Réciproquement, *THÉORÈME. Dans tout hexaèdre octogone tel que les droites que déterminent les sommets opposés passent toutes quatre par un même point ; les droites que déterminent les faces opposées sont toutes trois dans un même plan.*

*Démonstration*. Ces quatre droites passant par un même point, chacune d'elle est la commune section de trois des six plans qu'elles déterminent deux à deux, lesquels sont, en même temps les plans déterminés par les arêtes opposées; donc les trois arêtes d'un même sommet et leurs trois opposées du sommet opposé déterminent trois plans se coupant suivant une même droite; d'où l'on conclure (17, *série de gauche*) que les droites que déterminent les faces opposées de l'hexaèdre sont toutes trois dans un même plan.

*Remarques*. Les six plans déterminés par les arêtes opposées de l'hexaèdre, se coupant trois à trois suivant quatre droites passant par un même point, déterminent (7) trois nouvelles droites lesquelles ne sont autre chose que celles qui joignent le point de concours de ces quatre droites aux trois points que déterminent deux à deux les droites intersections des plans des faces opposées de l'hexaèdre. Ces nouvelles droites déterminent deux à deux trois nouveaux plans qui sont ceux qui contiennent le point de concours des quatre premières droites et les droites que déterminent les faces opposées.

On voit que les hexaèdres octogones du genre de ceux que nous considérons ici peuvent, de trois manières différentes, être envisagés comme la *somme* ou la *différence* de deux pyramides quadrangulaires, de même base, suivant que les deux sommets sont de *différens* côtés ou du *même* côté de la base commune.

envisagés comme la *différence* ou la *somme* de deux pyramides quadrangulaires de même sommet, suivant que les deux bases sont du *même* côté ou de *différens* côtés du sommet commun.

Une partie de ce qui précède peut encore être énoncé de la manière suivante:

Une partie de ce qui précède peut encore être énoncé de la manière suivante:

24. *THÉORÈME. Si l'on construit dans l'espace trois quadrilatères, ayant deux à deux, deux sommets opposées communs, et conséquemment six sommets en tout, de manière que les droites déterminées par leurs sommets opposées, lesquelles ne seront ici qu'au nombre de trois seulement, passent toutes par un même point ; les points que détermineront leurs côtés opposés seront six points distribués trois à trois sur quatre droites comprises dans un même plan. En outre, ces six points détermineront trois nouvelles droites qui seront celles suivant lesquelles leur plan sera coupé par les plans des trois quadrilatères; et ces nouvelles droites détermineront, à leur tour, trois nouveaux points, qui seront ceux où le même plan sera percé par les droites que déterminent les sommets opposés communs aux trois quadrilatères pris deux á deux.*

24. *THÉORÈME. Si l'on construit dans l'espace trois angles tétraèdres, ayant, deux à deux, deux faces opposées communes, et conséquemment six faces en tout, de manière que les droites déterminées par les plans de leurs faces opposées, lesquelles ne seront ici qu'au nombre de trois seulement, soient toutes trois dans un même plan ; les plans que détermineront leurs arêtes opposées seront six plans se coupant trois à trois suivant quatre droites passant par un même point. En outre, ces six plans détermineront trois nouvelles droites contenant le point commun aux quatre premières et les sommets des trois angles tétraèdre; et ces nouvelles droites détermineront à leur tour, trois nouveaux plans, dont chacun contiendra le point commun aux six premiers, et une des droites déterminées par les plans des faces opposées communes aux trois angles tétraèdres pris deux à deux.*

Rien n'empêche de supposer que les trois quadrilatères sont dans un même plan;[14] et, si alors on raisonne comme on l'a (18), on obtiendra ce nouveau théorème:

Rien n'empêche de supposer que les trois angles tétraèdres ont même sommet; et, si alors on raisonne comme on l'a fait (18), on obtiendra ce nouveau théorème:

25. *THÉORÈME. Si l'on construit trois angles tétraèdres de même sommet, ayant,*

25. *THÉORÈME. Si l'on construit, sur un même plan trois quadrilatères, ayant, deux*

[14] On obtient ainsi le théorème dont la démonstration a été demandée à la page 396 du XV.e volume du présent recueil.

*deux à deux, deux arêtes opposées communes, et conséquemment six arêtes en tout, de manière que les plans déterminés par leurs arêtes opposées, lesquels ne seront ici qu'au nombre de trois seulement passent par une même droite; les droites que détermineront leurs faces opposées seront six droites distribuées trois à trois sur quatre plans passant par le sommet commun de trois angles tétraèdres. En outre, ces six droites détermineront trois nouveaux plans, passant aussi par ce sommet commun; et ces trois derniers plans détermineront trois nouvelles droites dont chacune sera dans le plan des arêtes opposées de l'un des angles tétraèdres.*

En particulier, ce théorème contient le suivant;

26. *THÉORÈME. Dans tout angle hexaèdre, tel que les plans que déterminent les arêtes opposées passent tous trois par a même droite; les droites que déterminent les faces opposées appartiennent toutes trois à un même plan.*

Puis, en raisonnant comme nous l'avons fait (18);

27. *THÉORÈME. Dans tout hexagone tel que les droites que déterminent les sommets opposés passent toutes trois par le même point; les points que déterminent les côtés opposés appartiennent tous trois à une même droite.*

*à deux, deux côtes opposés communs, et conséquemment six côtés en tout, de manière que les points déterminés par leurs côtés opposés, lesquels ne seront ici qu'au nombre de trois seulement, appartiennent à une même droite; les droites que détermineront leurs sommets opposés, seront six droites se coupant trois à trois en quatre points du plan de ces quadrilatères. En outre, ces six droites détermineront trois nouveaux points de ce plan; et ces trois points détermineront trois nouvelles droites dont chacune contiendra le point déterminé par deux côtés opposés de l'un des quadrilatères.*

En particulier, ce théorème contient le suivant;

26. *THÉORÈME. Dans tout hexagone, tel que les points que déterminent les côtés opposés, appartiennent tous trois à une même droite; les droites que déterminent les sommets opposés passent toutes trois par le même point.*

Puis, en raisonnant comme nous l'avons fait (18);

27. *THÉORÈME. Dans tout angle hexaèdre tel que les droites que déterminent les faces opposées appartiennent toutes trois à un même plan; les plans que déterminent les arêtes opposées passent tous trois par une même droite.*

En Géométrie plane, ce serait le n.º 26 (*série de droite*) qui correspondrait au n.º 27 (*série de gauche*).

28. *THÉORÈME. Dans tout hexagone gauche tel que ses côtés opposés sont deux à deux dans trois plans; les droites que déterminent les sommets opposés passent toutes trois par un même point,*

28. *THÉORÈME. Dans tout hexagone gauche tel que ses côtés opposés concourent deux à deux en trois points; les droites que déterminent les plans des angles opposés sont toutes trois dans un*

*intersection de ces trois plans.*[15]

*Démonstration*. Si en effet on joint chaque sommet aux deux qui ne lui sont pas opposés par des droites, on aura ainsi douze droites que l'on pourra considérer comme les douze arêtes d'un octaèdre hexagone du genre de ceux dont il a été question (21 et suivant). Or les droites déterminées par les sommets opposés de l'hexagone gauche ne seront autre que les droites déterminées par les sommets opposés de l'octaèdre; d'où il résulte que ces trois droites passeront par un même point.

*même plan, déterminé par ces trois points.*

*Démonstration*. Si en effet on considère les intersections du plan de chaque angle avec les plans de deux angles qui ne lui sont pas opposés, on aura ainsi douze droites que l'on pourra considérer comme les douze arêtes d'un hexaèdre octogone du genre de ceux dont il a été question (21 et suivant). Or les droites déterminées par les plans des angles opposés de l'hexagone gauche ne seront autres que les droites déterminées par les faces opposées de l'hexaèdre, d'où il suit que ces trois droites appartiendront à un même plan.

*Remarques*. On pourrait traiter ici de l'icosaèdre dodécagone et du dodécaèdre icosagone dans lesquels les droites que déterminent les sommets opposés passent par le même point, ou dans lesquels les droites déterminées par les plans des faces opposées appartiennent à un même plan. On pourrait traiter ensuite de l'inscription et de la circonscription du tétraèdre à lui-même, de celle de l'octaèdre hexagone à l'hexaèdre hexagone, et de celle de l'icosaèdre dodécagone au dodécaèdre icosagone. On pourrait enfin placer ici l'article sur les lois générales qui régissent les polyèdres, rappelé au commencement du présent mémoire, ainsi qu'une grande partie de l'article de la page 321 du tome IX.[e]

Quelques personnes trouveront peut-être que ce qui précède manque de développement; mais nous les prierons de remarquer que nous n'écrivons pas pour les commençans, et qu'il nous a dû sembler préférable de multiplier les points de comparaison que d'entrer sur quelques-uns d'entre eux dans de minutieux détails que tout lecteur tant soit peu versé dans la géométrie pourra facilement suppléer. Nous croyons en avoir dit suffisamment pour mettre hors de toute contestation ces deux points de philosophie mathématique, savoir 1.º qu'il est une partie assez notable de la géométrie dans laquelle les théorèmes se correspondent exactement deux à deux, ainsi que les raisonnemens qu'il faut faire pour les établir, et cela en vertu de la nature même de l'étendue; 2.º que cette partie de la géométrie, qui prendrait une très-grande étendu, si l'on voulait y comprendre les lignes et les surfaces courbes,[16] peut être complètement développée indépendamment du calcul et de la connaissance d'aucune des propriétés métriques des grandeurs que l'on considère.

Il nous a paru qu'un point de doctrine d'une importance aussi majeure, dont nous avons été frappés pour la première foi il y a plus de dix ans, et que l'esprit de détail avait dérobé jusqu'ici à la vue de géomètres, ne devait pas demeurer plus long-temps sans être mis en pleine évidence. Nous craignons bien toutefois que ce que nous venons d'écrire

[15] On reconnaît ici les deux théorèmes dont M. Dandelin a tiré un si heureux parti (Tom. XV, pag 393).

[16] Voici de quelle manière on pourrait débuter dans la partie de cette géométrie relative aux lignes et surfaces courbes.

passe sans être aperçu ou que du moins d'après un examen superficiel, beaucoup n'y voient qu'un de ces rapprochemens forcés qui n'ont de consistance que dans l'esprit de ceux qui les imaginent.