

AS ESCOLAS DE ÁBACO E A EXPANSÃO DOS ALGARISMOS INDO-ARÁBICOS NA EUROPA OCIDENTAL

Raquel Gomes Rosa de Mendonça
Secretaria Municipal de Educação de Duque de Caxias - SME - Brasil

João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho
Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ - Brasil

Patrícia Nunes da Silva
Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ - Brasil

(aceito para publicação em fevereiro de 2024)

Resumo

Este artigo lança luz sobre a disseminação dos algarismos indo-arábicos através de evidências recentes que vão além da apresentação de um cenário político e econômico favorável da Europa Ocidental para reconstruir a transição de praticantes europeus de numeração romana para indo-arábica. Por ser um assunto extremamente vasto, nos concentraremos em dois aspectos: o livro *Liber abaci*, de Fibonacci, e as escolas de ábaco. Em torno dessas escolas surgiram outros dois grandes expoentes desse processo de disseminação: os mestres e os manuais de ábaco. Esses textos contêm os assuntos tratados nas escolas de ábaco e, em muitos casos, a influência da obra de Fibonacci é evidente. Estas instituições floresceram a partir do final do século XIII em grandes centros comerciais italianos. Assim como Fibonacci, as escolas de ábaco também se baseavam no ensino do cálculo com os algarismos indo-arábicos. O estudo desta relação é importante para entender as conexões entre a matemática e a educação e como as transformações sociais influenciam nas competências a serem desenvolvidas na educação escolar. Por fim, apresentamos discussões acerca do papel de Fibonacci considerado um dos protagonistas desta história.

Palavras-chave: Matemática, História, algarismo indo-arábico, escola de ábaco, *Liber abaci*, Fibonacci.

[THE ABACUS SCHOOLS AND THE EXPANSION OF HINDU-ARABIC NUMERALS IN WESTERN EUROPE]

Abstract

This article sheds light on the spread of Indo-Arabic numerals through recent evidence that goes beyond presenting a favorable political and economic scenario in Western Europe to reconstructing the transition of European practitioners from Roman to Indo-Arabic numerals. As it is an extremely vast subject, we will focus on two aspects: Fibonacci's *Liber abaci* book and the abacus schools. Two other great exponents of this dissemination process emerged around these schools: the abacus masters and manuals. These texts contain the subjects dealt with in the abacus schools and, in many cases, the influence of Fibonacci's work is evident. These institutions flourished from the end of the 13th century in great Italian commercial centers. Like Fibonacci, abacus schools were also based on teaching calculus with Hindu-Arabic numerals. The study of this relationship is important to understand the connections between mathematics and education and how social transformations influence the skills to be developed in school education. Finally, we present discussions about the role of Fibonacci considered one of the protagonists of this story.

Keywords: Mathematics, History, Hindu-Arabic numeral, abacus school, *Liber abaci*, Fibonacci.

Introdução

A adoção dos algarismos indo-arábicos pela Europa Ocidental ainda é um tema que desperta interesse da historiografia matemática. Após a redescoberta de Leonardo Fibonacci por Boncompagni em 1857, muitos autores, como Høyrup, Spiesser, Franci, Danna, têm dedicado seu tempo para pesquisar tanto a influência de Fibonacci quanto como foi o processo de adoção desses algarismos na Europa. Nesse processo, a Itália desempenha um papel chave, pois a partir do final do século XIII, observamos o início da disseminação da matemática do ábaco¹, uma das tradições que acompanha a difusão do sistema de numeração indo-arábico na Europa.

No final do século XII, o Mediterrâneo desempenhava um papel catalisador no sistema econômico e nas relações internacionais. Os comerciantes italianos viram a necessidade de lidar com técnicas de cálculo e registro mais complexas e a aritmética indo-arábica teve um papel importante fornecendo a base matemática de tais inovações. Então, a partir da necessidade de aprender as principais noções da matemática do ábaco, nasceram as escolas de ábaco, escolas especiais nas quais era ensinado o novo algoritmo.

¹ Originalmente, o termo ábaco se referia a um instrumento utilizado para calcular por meio de contadores. Porém, após a introdução dos números indo-arábicos, na Itália, o termo passou a ser usado de forma mais abrangente, sendo relacionado também à habilidade de fazer cálculos com esse novo sistema de numeração.

No Brasil, percebemos que a bibliografia a respeito desse tema é escassa. O trabalho mais recente encontrado é uma publicação de José dos Santos Guimarães Filho e João Cláudio Brandemberg que apresentam a conjuntura política e econômica como um cenário propício para implementação dos algarismos indo-arábicos.

Diferentemente de Guimarães Filho e Brandemberg (2021), apresentamos também as escolas de ábaco e os manuais de ábaco que tiveram um papel fundamental na disseminação e adoção dos algarismos indo-arábicos na Itália (ou melhor, nas cidades independentes italianas e, posteriormente, nos estados regionais italianos) e, por conseguinte em toda a Europa Ocidental. O que ajuda a preencher essa lacuna da historiografia da Matemática no Brasil.

O Mediterrâneo nos séculos XI e XII

Entre os séculos V e X, a Europa Ocidental sofreu uma série de transformações, inclusive um processo de ruralização, que estabelece uma nova ordem político, social e econômica (feudalismo), além do fortalecimento político da Igreja Católica. O aumento populacional gera uma maior oferta de mão-de-obra o que ocasiona um excedente na produção. Em razão disso, nos séculos XI a XIII, ocorreu outra importante transformação, a consolidação do comércio que passou a desempenhar um papel central no Ocidente, com repercussão muito além da esfera econômica.

Durante o século XI, o Ocidente inicia a transição da Idade Média para o Renascimento. Amplia seus contatos com o mundo muçulmano, tanto o Ocidental (Maghreb, Norte da África) quanto o Oriental. A Europa oriental, dominada pelo Império Bizantino, tinha Constantinopla não apenas como sua capital, mas também seu principal centro comercial. Com uma posição geográfica privilegiada, estabelecia relações comerciais com várias partes do mundo, entre elas o norte da África e a Ásia.

Com o intuito de conter a expansão islâmica, que chegou a conquistar o norte da África e parte da Península Ibérica e que já havia conquistado Jerusalém, foi iniciado o período das Cruzadas pelo papa Urbano II, em 1095. Pisa que se tornara uma República Marítima se aproveitou dessas expedições, assim como Gênova e Veneza, para expandir em locais estratégicos seus postos comerciais e colônias em regiões desde a costa da Sicília ao Norte da África, chegando a controlar a Sardenha. Veneza, Gênova e Pisa, apesar da rivalidade, mantinham uma supremacia marítima e dominavam o comércio no Mediterrâneo.

Os muçulmanos, durante o Califado Almóada, expandiram seu território dominando o Magrebe e o sul da Península Ibérica. O movimento que se iniciara por motivações religiosas, em 1160, unificou o Magrebe pela primeira e única vez na sua história. As cruzadas além de possibilitar um maior encontro do Ocidente com a cultura muçulmana, também proporcionaram às cidades italianas os mais amplos privilégios nos centros marítimos da Terra Santa, através da reconquista da cidade do Acre, em 1191, principal centro econômico do reino de Jerusalém.

Na segunda metade do século XI, os normandos iniciaram a conquista do sul da Itália e da Sicília, antes de domínio árabe, formando o Reino da Sicília no ano de 1130.

Apesar das invasões e rebeliões sucessivas enfrentadas pelos normandos, a Sicília manteve toda a importância comercial e estratégica ditada pela sua posição geográfica.

Os comerciantes italianos foram responsáveis, em grande parte, pela conexão comercial entre as duas fontes principais do comércio internacional, o norte da Europa e os países do norte da África e da região da Ásia próximo ao mar Mediterrâneo, através das feiras que se realizavam durante todo o ano. As principais feiras ficavam nas regiões do Champanha, na França, na atual Itália (Gênova e Veneza) e em Flandres (atual Bélgica). No século XII já havia um comércio de larga escala entre o norte da Itália e o Magrebe onde Gênova e Pisa já estavam bem estabelecidas. Em geral, as relações entre os países da costa do Mediterrâneo são constituídas por complexos jogos de alianças diplomáticas e conflitos em que as apostas econômicas são importantes.

Os conflitos por domínio territorial fizeram com que, no século XII, o Mediterrâneo se tornasse um centro de três mundos culturalmente distintos: o cristão latino, o cristão grego e o muçulmano. A coexistência de populações de origens, línguas e religiões diversas permitiu uma efervescência cultural produzindo um ambiente propício para o reaparecimento cultural e científico.

Fibonacci e o *Liber abaci*

É dentro desse contexto plural do Mediterrâneo que nasceu Leonardo de Pisa (c. 1175 – 1250), mais conhecido hoje por todo o mundo como Fibonacci, na cidade de Pisa, uma república marítima com autonomia política e importante centro comercial, e filho de Bonacio.

Pisa assim como outras grandes cidades comerciais italiana mantinha enclaves comerciais em várias partes do mediterrâneo e Bugia era uma delas. Localizada no norte da África na atual Argélia, Bugia foi, entre os séculos XII e XIV, um dos mais importantes centros políticos, econômicos e intelectuais do Magrebe central, uma interseção entre os mundos muçulmano e cristão. Em Bugia, Fibonacci, ainda jovem foi instruído em matemática quando seu pai, funcionário público, fora desempenhar uma função alfandegária. Lá se encantou com a “arte das nove figuras indianas”. E mais tarde continuou seus estudos em extensas viagens de negócios ao Egito, à Síria, à Sicília e Provença, tendo contato com cientistas de todo o mundo mediterrâneo. Ele se tornou proficiente nos Elementos de Euclides e no método matemático grego de definição, teorema e prova, aprendeu com os árabes o sistema de numeração dos hindus e os seus algoritmos de cálculo.

Tendo percebido as vantagens desse sistema, ele escreveu, em latim, sua obra intitulada *Liber abaci* publicada, pela primeira vez, em 1202, com uma segunda versão em 1228, com o objetivo de levar ao povo italiano² (*gens latina*) esse conhecimento, de acordo com Sigler (2003). Apesar do conhecimento dos números hindus ter chegado anteriormente na Europa no século X pela Espanha trazido pelos muçulmanos, não era ainda uma prática de uso comum em sua época.

² Embora a Itália não existisse como país unificado, na época estudada, chamaremos a península italiana simplesmente de Itália.

O conteúdo do livro está dividido em 15 capítulos. O capítulo 1 trata da leitura e escrita dos números no sistema indo-arábico; o capítulo 2 é sobre métodos de multiplicação; o capítulo 3, sobre métodos de adição; o capítulo 4, sobre métodos de subtração; o capítulo 5, sobre métodos de divisão; o capítulo 6, sobre métodos de multiplicação de números inteiros por frações; o capítulo 7, sobre métodos de adição, subtração e divisão de frações; o capítulo 8, sobre métodos de aquisição e venda de mercadorias e similares; o capítulo 9, sobre métodos de comércio; o capítulo 10, sobre métodos de regra das companhias; o capítulo 11, sobre métodos envolvendo liga e conversão de pesos, moedas, etc; o capítulo 12, sobre solução de diversos problemas. Nesse capítulo encontramos o mais famoso de seus problemas, o problema dos coelhos, que deu origem a conhecida sequência de Fibonacci; o capítulo 13, sobre métodos da falsa posição; o capítulo 14, sobre cálculo de raízes quadradas e cúbicas; o capítulo 15, sobre métodos envolvendo a regra da proporção geométrica e questões de álgebra e almucábala³.

Fibonacci inicia o primeiro capítulo apresentando os nove símbolos indianos para representar os numerais. O sistema hindu tinha a vantagem de ser usado tanto para o cálculo quanto para o registro do resultado. Ao contrário do sistema romano no qual os cálculos exigiam o uso do ábaco.

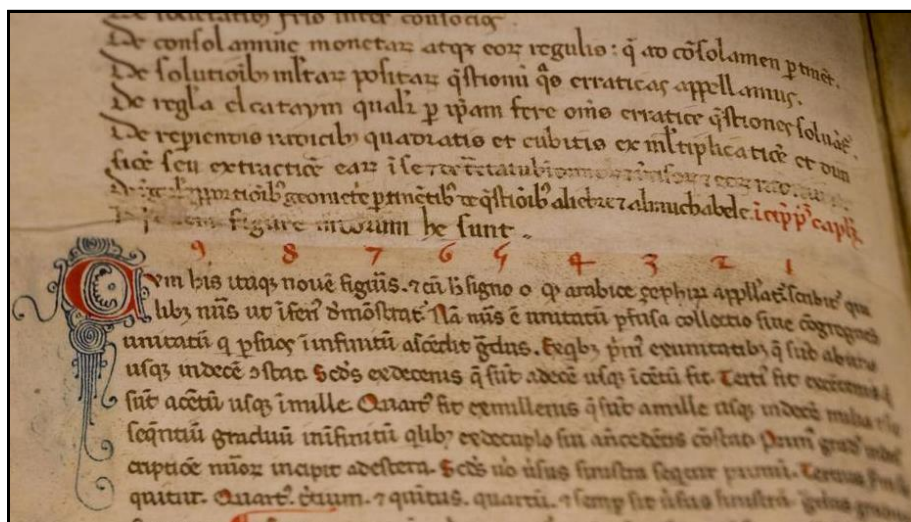


Figura 1 – Trecho de uma cópia do *Liber abaci* do século XIV

Fonte: <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-liber-abaci-of-leonardo-of-pisa>

³ Os termos álgebra e almucábala são derivados do árabe al-jabr (em latim *restauratio*) e al-muqabala (em latim *opositio*). Esses termos eram usados para definir a técnica de resolução de equações de primeiro e segundo grau e, posteriormente, foram usados, no sentido amplo, para indicar os textos sobre a teoria das equações. Porém, apenas o termo álgebra foi preservado na linguagem matemática moderna; o outro logo caiu em desuso e já não era utilizado no final da Idade Média.

Após apresentar os nove algarismos indianos, Fibonacci apresenta o símbolo 0, e o chama de *zefir* assim como os árabes. O zero não existia no sistema romano. Também caracteriza o número como uma soma de unidades, trazendo a ideia de sucessão dos números naturais. Em seguida, ensina o significado dos algarismos, ou seja, quanto cada símbolo vale, o sistema de posição e o uso do zero na representação numérica.

Fibonacci recorda a forma de representação numérica com as mãos e recorre a esse sistema quando diz que um número é mantido nas mãos. Essa forma de representação era muito comum, mas atualmente no nosso algoritmo de multiplicação, por exemplo, esses números também são registrados no papel.

Por fim, ele termina o primeiro capítulo apresentando duas tabelas auxiliares, uma de soma e outra de multiplicação. Atualmente, só utilizamos a de multiplicação, a nossa chamada tabuada.

Nos quatro capítulos seguintes, ele ensina os algoritmos para as operações de multiplicação, soma, subtração e divisão. É interessante perceber que no início o zero é apresentado como um símbolo apenas, porém ao longo dos capítulos percebemos que além de um símbolo para o vazio em um sistema posicional, ele também tem o significado de quantidade nula, ou seja, é tratado como um número.

Outra observação interessante a ser feita é a utilização da prova dos nove ou nove fora⁴, nessa prova real vemos além da utilização do critério de divisibilidade por 9 também a utilização do conceito de módulo ou aritmética dos restos. Essa prova não é ensinada atualmente, pois nem sempre pode determinar se uma operação está correta⁵.

Fibonacci não se detém apenas a ensinar o sistema numérico hindu e seus algoritmos. Segundo Sigler (2003), trata-se de um trabalho que contém grande parte da matemática conhecida do século XIII em aritmética, álgebra e resolução de problemas e os métodos apresentados possuem provas geométricas euclidianas o que torna seu trabalho diferente dos outros manuais de cálculo. Os capítulos 8 a 11 tratam de situações nos negócios e no comércio, conversão de unidades de dinheiro, peso e conteúdo, métodos de troca, parcerias comerciais e alocação de lucro, liga metálicas para produção de moedas, investimento de dinheiro, juros simples e compostos. Os exemplos do capítulo 8 atestam seu envolvimento no comércio internacional no Mediterrâneo e sua competência diante da complexidade das trocas por conta da multiplicidade de moedas e unidades de medida. Ele também inclui muitos problemas puramente para mostrar o poder e a beleza de sua matemática.

Além do *Liber abaci*, Fibonacci escreveu os livros: em 1220, *Practica geometriae* e, em 1225, Flos, *Epistola ad Magistrum Theodorum* e *Liber quadratorum*. Este último, de acordo com Eves (2004), um trabalho original sobre análise indeterminada, à frente da

⁴ Uma regra prática para achar o "nove fora" de um número é somar seus algarismos e tirar do resultado o maior múltiplo de 9 nele contido. O resto é chamada de resíduo. Na multiplicação, por exemplo, calcule o resíduo do multiplicando e do multiplicador, multiplique os dois resultados. Em seguida, calcule o resíduo do produto. Se os resultados forem iguais, pela regra, a conta foi realizada corretamente. Para adição o processo é o mesmo, porém é realizada a soma dos resíduos das parcelas.

⁵ Se uma conta for realizada corretamente a prova dos nove irá sempre confirmar a exatidão da resposta. No entanto, a possibilidade de falha ocorre quando a conta está errada, pois a prova não é capaz de identificar o erro. Por exemplo, uma inversão na ordem dos algarismos do resultado não será detectada pela prova, uma vez que a ordem não altera a soma.

maioria dos intelectuais da época, que o colocou como um dos matemáticos mais importantes desse campo entre Diofanto e Fermat.

Além de Fibonacci, dois outros autores contribuíram para a difusão dos números indo-arábicos: o francês Alexandre de Villedieu com *Carmen de algorismo* (1202), e o inglês João de Halifax, mais conhecido como Sacrobosco, com *Algorismus vulgaris* (c.1240).

O sistema numérico indo-arábico e seus métodos de cálculo não foram adotados imediatamente após a publicação do *Liber abaci*. Haja visto que, em 1299, Florença proibiu o uso dos numerais indo-arábicos pelos banqueiros, alegando serem mais fáceis de falsificar do que os romanos, por exemplo, o 0 pode ser transformado facilmente em um 6 ou 9, o que não impediu sua disseminação.

Escolas e mestres de ábaco

A ampliação das rotas comerciais possibilitou a ligação entre Ocidente e Oriente e entre o norte e sul da Europa. A intensificação do comércio provocou as transações comerciais em grande escala e aumentou a necessidade do uso da moeda dando origem às atividades bancárias. A revolução comercial iniciada no século XI foi em parte uma revolução nas técnicas comerciais que exigiam uma matemática mais sofisticada por causa da complexidade monetária, o desenvolvimento dos bancos, empréstimos a juros, contratos.

No século XIII, surge na Itália a letra de câmbio que revolucionou o mercado monetário internacional europeu e no século XIV era o principal meio para realizar pagamento internacionais, além de ser utilizada como instrumento de crédito, pois permitia mascarar os juros cobrados pelo empréstimo, que na época eram proibidos pela Igreja Católica. Com a revolução comercial, os comerciantes precisavam de melhores ferramentas para lidar com multiplicações e divisões, pois o comércio internacional requeria o cálculo para conversões e taxas de câmbio, dando aos indo-arábicos um papel importante no desenvolvimento dessa inovação financeira, já que ofereciam melhores técnicas para lidar tanto com notação numérica quanto com cálculo. Ou seja, a adoção dos numerais indo-arábicos abriu possibilidades que eram dificultadas pelos sistemas numéricos anteriores.

Até esse momento, existiam na Itália apenas as escolas de gramática cujo objetivo era o estudo da gramática latina e o estudo das letras, da retórica e da lógica. Nesse contexto, fez-se necessário oferecer aos comerciantes e banqueiros internacionais o conhecimento não só desses algarismos como também da sua aritmética. Desenvolve-se então uma educação matemática ligada à estrutura econômica e social que foi organizada por meio das chamadas escolas de ábaco.

Apesar do nome, essas escolas se dedicavam a ensinar técnicas de cálculo sem o ábaco, através do uso dos numerais indo-arábicos e tinham como objetivo treinar jovens desde os onze anos em matemática prática para tratar de problemas ligados a atividades comerciais, pois as relações comerciais, que estavam saindo da dimensão local, atingiram uma amplitude que exigia técnicas de cálculo e registro mais complexas, bancárias, artesanais e artísticas e, em geral, todas aquelas atividades que necessitavam de uma matemática básica; além, de preparar os futuros mestres de ábaco. As escolas de ábaco eram frequentadas não apenas por jovens iniciados na profissão de comerciante e bancário,

mas também por futuros artesãos, arquitetos e artistas, como exemplo Filippo Brunelleschi, Leonardo da Vinci, Leon Battista Alberti, Piero della Francesca e Michelangelo onde aprenderam ferramentas matemáticas sem as quais a invenção da perspectiva teria sido impossível. Usualmente, essas escolas eram a continuação de um ciclo inicial de estudos onde os alunos aprenderam a ler e escrever em latim e no vernáculo. Essas escolas expandiram-se para várias regiões da Itália, principalmente em Florença, e estão relacionadas ao desenvolvimento do capitalismo no fim da Idade Média.

As escolas italianas de ábaco, de modo geral, foram públicas sendo de responsabilidade dos magistrados municipais, órgãos locais e, em alguns casos, de universidades indicar os mestres (professores) de ábaco, muitas vezes cuidando de seu salário, que às vezes era pago, total ou parcialmente, pelas famílias dos alunos.

Embora os registros oficiais atestem a existência, em Pisa, de mestres de ábaco a partir de 1399, Ulivi (2002) sugere que o primeiro mestre de ábaco teria sido o próprio Fibonacci, pois neles há registro de que, já em 1241, ele recebia a quantia de 20 liras por ano pelo ofício de consultor de ábaco para o município de Pisa e seus funcionários.

No final do século XIII, várias cidades da Itália, principalmente na Toscana, possuíam escolas municipais de ábaco. Já em Veneza e Florença, grandes centros comerciais, as escolas de ábaco eram predominantemente de caráter privado. A mais antiga evidência da existência dessas escolas, em Veneza, data do ano de 1305. Em 1408 foi construída a Escola Rialto onde estudou Luca Pacioli que desempenhou um papel fundamental na educação matemática de Leonardo da Vinci, conforme Silva e Pereira (2019).

Em Bolonha, os primeiros a aprender e ensinar a arte do ábaco, entre 1265 e 1279, foram os mestres Pietro e Giovanni. Em 1277, o município de Verona aprovou a criação de uma escola de ábaco. Em 1279, encontramos também o mestre Michele em San Gimignano que se dedicou ao ensino de crianças.

Florença foi o centro mais importante para o desenvolvimento dos primeiros estágios da matemática do ábaco. Entre os anos de 1280 e 1540, há relatos de 20 escolas de ábaco e 70 abacistas, quase todos mestres de ábaco. Além disso, os registros de frequência dessas escolas apontam, em 1338, a existência de 1000 a 1200 alunos em seis escolas de ábaco, segundo Villani (apud Grendler, 1989). Os registros de Ulivi (2002) mostram que no ano de 1480 a porcentagem de meninos que frequentavam a escola de ábaco era aproximadamente 25%. Para uma cidade, segundo Danna (2019), com uma população estimada entre 100 e 130 mil habitantes no século XIV, esses números demonstram sua grandiosidade e liderança no início da recepção e desenvolvimento da matemática do ábaco. O documento florentino mais antigo que faz menção a um mestre de ábaco, Iacopo dell'abacus, é datado de 1283. Até 1350, o ensino era privado e realizado em casa ou lojas que ficaram conhecidas como "*botteghe d'abacus*". Os mestres florentinos eram reconhecidos por sua habilidade e sua fama levou-os a ensinar em outros municípios, como os irmãos Ranieri e Gherardo di Chiaro que também lecionaram em Siena.

Florença gerou grandes famílias de abacistas até século XVI. Destacamos a família do mestre Moro (XIII – XIV), a família Corbizzi de Fiesole (XIV) e a família do mestre Luca di Matteo (XIV – XVI). Destacamos também o mestre Paolo dell'Abaco que atuou na mais conhecida escola de ábaco de Florença, *Bottega di Santa Trinita*. Entre seus alunos

destacam-se Jacopo di Dante Alighieri, filho do poeta, e Antonio di Giusto Mazzinghi que se tornou um dos mais importantes mestres de ábaco da geração seguinte, além de ter herdado os livros e instrumentos astrológicos de seu mestre. (Danna, 2019)

Na primeira metade do século XIV, essas escolas são atestadas em Lucca, Savona e Siena. Em 1373 em Gênova. Em Arezzo, entre 1394 e 1530, são conhecidos dezoito mestres de ábaco públicos e, no ano de 1471, 5% dos meninos frequentavam a escola de ábaco. Entre os séculos XIV e XV foram implantadas escolas de ábaco em Città di Castello, Colle Val d'Elsa, Fucecchio, Milão, Palermo, Perugia, Pistoia. Em 1409, o município de Volterra contratou seu primeiro professor de ábaco. Em Brescia, desde 1436 há escolas públicas de ábaco. E o mais famoso bresciano mestre de ábaco foi Niccolò Tartaglia que lecionou em Verona no século XVI. Ainda no século XV, em Prato, a informação sobre a existência de mestres de ábaco públicos vem de uma carta datada de 31 de julho de 1471.

Os ensinamentos dos mestres de ábaco extrapolaram os muros das escolas e chegaram à Universidade. É o caso do mestre florentino Antonio Bonini Biliotti que exerceu sua atividade docente na Universidade de Bolonha entre 1384 e 1407. De modo semelhante ocorreu na capital da Úmbria, na Universidade de Perugia, nos anos de 1389 e 1396. É da região da Úmbria o livro de ábaco conhecido mais antigo, datado entre 1288 e 1290. Intitulado *Livero de l'Abbecho*, cujo autor é um mestre anônimo o que sugere ter havido escolas de ábaco nesse período nessa região. Porém a integração entre matemática prática e acadêmica iniciou apenas no final do século XV com Luca Pacioli, Niccolò Fontana, conhecido por Tartaglia, e Girolamo Cardano⁶.

Além de professores, que era sua principal fonte de renda, os mestres de ábaco também prestavam consultoria remunerada em diversas atividades produtivas ou comerciais. Eles também escreveram manuais de ábaco difundidos desde o final do século XIII que têm despertado um interesse crescente nos estudiosos da historiografia matemática medieval.

Manuais de ábaco

No contexto da efervescência do comércio internacional, fez-se necessário oferecer aos comerciantes e banqueiros internacionais o conhecimento não só dos algarismos indo-arábicos como também da sua aritmética. Para isso, os italianos desenvolveram o manual de ábaco ou matemática do ábaco, uma tradição de aritmética prática.

Esses textos se desenvolveram na Itália juntamente com as escolas de ábaco, uma literatura peculiar associada à instrução matemática na Idade Média que se desenvolveu até o século XVI. Considerados manuais, esses textos contém os assuntos tratados nas escolas de ábaco, seu foco principal não era a teoria matemática, mas sim suas aplicações práticas. Como consequência, os manuais de ábaco não seguem a estrutura dedutiva do modelo euclidiano e são organizados em seções temáticas que compreendem listas de problemas resolvidos. As regras matemáticas, quando presentes, são geralmente fornecidas sem demonstração no início de sua seção e são seguidas por uma lista de problemas resolvidos

⁶ Os mestres de ábaco ensinavam astronomia e astrologia, subordinada à medicina, não à teoria matemática. (Høyrup, 2018, p.5)

nos quais a regra é aplicada. Diferentemente do *Liber abaci*, esses manuais foram escritos em sua grande maioria em vernáculo italiano. Seus autores eram principalmente mestres de ábaco, no entanto, segundo Ulivi (2015), alguns foram escritos por apreciadores da matemática, comerciantes, contadores e artistas, como o pintor italiano Piero della Francesca. O catálogo⁷ mais completo disponível desses manuais, do século XIII ao XVI, identifica 288 manuscritos, desses apenas quatro textos são latinos e os demais, 284, são escritos em vernáculos, e 153 textos impressos.

Apesar de uma literatura variada, esses textos possuem um conjunto de seções semelhantes, ou seja, transmitem um padrão de conhecimento matemático. São elas: introdução ao sistema de numeração indo-arábico, as quatro operações aritméticas com inteiros e frações, as regras de três e da falsa posição, aritmética mercantil, geometria prática, solução de equações do segundo grau, cálculo de raízes quadradas. Também apresentavam problemas na forma de matemática recreativa. De acordo com Danna (2021), do ponto de vista teórico, as principais contribuições dos manuais de ábaco foram a introdução do sistema de numeração indo-arábico e das frações e os primeiros desenvolvimentos da notação algébrica moderna européia.

Paralelo ao fenômeno exclusivo na Itália de expansão das escolas de ábaco por suas regiões até o século XV observamos também um protagonismo na produção dos manuais de ábaco pelos italianos. Só a partir da segunda metade do século XV essa produção se torna acentuada fora da Itália.

Nessa seção, nos baseamos no trabalho de Danna (2021) que fornece uma reconstrução detalhada da tradição dos manuais de ábaco em toda a Europa desde o final do século XIII até 1600, baseada em um banco de dados original composto por 1280 textos, tanto manuscritos quanto impressos, escritos por mais de 340 autores.

No final do século XIII, em Pisa, inicia-se a produção de manuais do ábaco. Florença posteriormente se torna o centro de produção manuscrita e difusão desses textos e, em seguida, no século XVI, Veneza graças à sua indústria de impressão a substitui. No século XIV, vemos esses textos escritos em Florença, Lucca, Veneza, Perugia, Gênova, Bologna, Milão, Pádua, Roma, Avignon e Montpellier.

Úmbria conta com o primeiro texto em italiano deste gênero intitulado *Livro de l'abbecho*, obra de um mestre anônimo e datado do final de 1200. O livro, dividido em 31 capítulos muito curtos, traduz para o vernáculo e quase fielmente a obra de Fibonacci, com algumas alterações imaginativas como no caso do chamado “problema dos dois coelhos” que é explicado através de um par de pombos. Três capítulos são totalmente originais e expressamente dedicados a operações de natureza econômica, como cálculo de amortização e juros. Florença, além de ser uma das capitais da revolução comercial, desempenhou um papel central na difusão do sistema de numeração indo-arábico com a maior produção identificada de 88 manuais de ábaco antes de 1600; destes, 82 são manuscritos e 75 são datáveis antes de 1500.

No final do século XIV e início do século XV surgem na Espanha os primeiros textos aritméticos práticos não italianos empregando os números indo-arábicos. É o início dessa produção fora da Itália, que se consolidou apenas no século XV. No sul da França,

⁷ W. Van Egmond, *Practical mathematics in the Italian Renaissance*, publicado em Florença em 1980.

encontramos o *Manuscrit de Pamier*, escrito entre 1420 e 1430 em Pamier, cidade entre Toulouse e Barcelona. Este manuscrito preserva um texto anônimo escrito em provençal que apresenta o conteúdo e a estrutura típicos de um tratado de ábaco, pois mostra como fazer operações com números inteiros e frações, seguidas por problemas aplicados. Em direção ao norte, surge na Alemanha, em Regensburg, o primeiro texto de aritmética prática. Escrito em meados do século XV por um monge beneditino, o *Algorismus Ratisbonensis* desempenhou um papel semelhante ao do *Liber abaci* na Itália. E no final do século XV, a Alemanha institui as primeiras escolas públicas que também ofereciam o ensino de matemática.

Em 1455 com a invenção da imprensa de tipo móvel por Gutenberg a produção desses textos é acelerada assim como sua difusão. Em 1478 foi publicada a primeira aritmética impressa, a Aritmética de Treviso ou *Arte dell'Abaco*.

No início do século XVI, em 1508, chegam à Holanda os textos aritméticos práticos escritos em holandês. Em 1519, é impresso em Portugal o primeiro texto aritmético prático, o *Tratado da pratica darismetyca* de Gaspar Nicolas.

A Inglaterra, onde a publicação de aritmética prática decolou na segunda metade do século XVI, e onde os números indo-arábicos ainda tinham uma circulação limitada no final do século, destaca-se como o retardatário neste ciclo. O primeiro texto de aritmética prática inglês é o *An Introduction for to lerne to reckon with the Pen and with the Counters*, publicado em 1536/7 em St. Albans. No entanto, foi o *The ground of artes teachyng the worke and practise of arithmetike*, publicado em 1543, em Londres, que desencadeou a difusão deste tipo de manual aritmético na Inglaterra.

Em 1560, também temos a primeira publicação de um texto de aritmética prática na Dinamarca. Em 1575, a produção desses textos é consolidada na Suíça com a primeira publicação em Zurique, de uma reimpressão da obra *Rechenbuch uff linien und zyffren* de Adam Riese de 1565. Em 1600, a difusão da aritmética prática alcançou pela primeira vez os húngaros, com publicações em Debrecen e Cluj.

A Figura 2 mostra as cidades que no final do período observado, em 1600, produziam textos aritméticos práticos. Observamos uma grande expansão desses centros de produção pelo território europeu. Assim como uma transmissão e difusão do conhecimento no sentido sul-norte da Europa que não se deu por vias marítimas, mas sim por vias terrestres, ou seja, não seguiu os eixos do comércio marítimo, e sim uma rede interna baseada na proximidade.

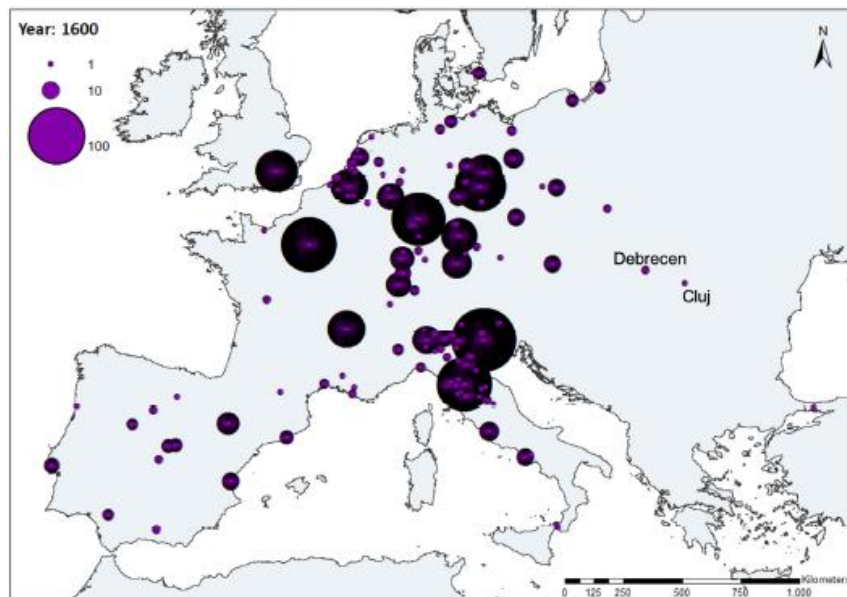


Figura 2 – Produção de textos aritméticos práticos no ano de 1600

Fonte: Danna, 2021, p.33

É interessante ressaltar que o impacto dessa tradição se espalhou, entre séculos XIII e XVI, mesmo em contextos diferentes da matemática praticada nas universidades.

Fibonacci e os manuais de ábaco

A recepção da obra de Fibonacci na Europa Ocidental, principalmente na Itália entre os séculos XIII e XVI, é um importante tópico no entendimento da relação entre história da matemática e o desenvolvimento da sociedade. Segundo Pepe (2002), os matemáticos italianos Pietro Cossali e Giambattista Guglielmini, que viveram no século XVIII, foram os primeiros a suscitar o problema da avaliação crítica da obra de Leonardo e seu papel na transmissão da ciência para o Ocidente. Cossali datou o *Liber abaci* no início do século XIII e Guglielmini foi o primeiro a inserir a obra de Fibonacci no contexto político e cultural de seu tempo, pois entendia que, na tradição do Iluminismo, a história da matemática fazia parte da história das civilizações. Baldassarre Boncompagni preparou e publicou, em 1857, a primeira edição moderna do *Liber abaci* e desempenhou um papel fundamental na reconstrução da vida e influência desse importante matemático.

No século XX, muitos manuscritos de matemáticos italianos do final da Idade Média e início da Idade Moderna foram descobertos devido ao trabalho de pesquisadores como Paul Louis ver Eecke, Ettore Picutti e, principalmente, Gino Arrighi. No entanto, é a partir da década de 1970 que uma série sistemática de trabalhos e descobertas sobre

matemática e instrução matemática na Itália no final da Idade Média e no início do período moderno foi realizada com importante contribuição da universidade de Siena que constituiu o Centro para o estudo da Matemática Medieval. Apesar das muitas descobertas o que tornou o cenário historiográfico da matemática medieval mais esclarecedor, ainda há incertezas sobre questões importantes, como a influência precisa que Fibonacci exerceu sobre os manuais de ábaco.

Com relação a essa influência, Ulivi (2015) afirma que esses manuais eram uma síntese das “obras monumentais e complexas” de Fibonacci, mas que poderiam propor acréscimos. De igual modo, Giusti (2002) se refere a esses manuais como versões vernáculas mais simples, pois o autor eliminava as partes mais abstratas e teóricas das obras de Fibonacci. Em outros casos, os autores extraíam dos muitos exemplos e problemas do *Liber abaci* material para inserir em seus tratados. Spiesser (2004, p.1) afirma que “fica claro que a influência do *Liber abaci*, ainda que não exclusiva, foi decisiva no nascimento e desenvolvimento de trabalhos matemáticos voltados para a prática comercial”.

Høyrup (2005) define como uma crença o princípio de que toda corrente intelectual tem que descender de um grande livro que é conhecido por nós. Assim, ele interpreta as referências a Fibonacci encontradas nos manuais do ábaco como uma referência a um autor que era considerado uma autoridade nem sempre compreendida pelos autores que o citavam. A partir da ideia de que a matemática do ábaco já existia no tempo de Fibonacci, Hoyrup (2005) o considera “um extraordinário expoente inicial, mas nenhum pai fundador”. Giusti (2002) o define como um grande compilador não só da matemática árabe como de todo conhecimento que adquiriu durante sua vida.

Sobre a obra de Fibonacci, Hoyrup afirma que:

“(…) é altamente provável que qualquer ensino comercial que tenha ocorrido na Itália durante a juventude de Fibonacci ainda fosse baseado em algarismos romanos, e que a aplicação consistente de algarismos árabes a assuntos familiares é o que torna seu tratado realmente novo (além, é claro, de sua escopo exorbitante e sua integração de álgebra e material euclidiano e de numerosas variantes sofisticadas de muitos problemas recreativos); tal interpretação se encaixaria melhor em suas palavras do que a crença de que tudo no livro era novo em seu mundo.”
(Hoyrup, 2005, p.41, tradução nossa)

Não há controvérsia quanto ao fato de que Fibonacci reuniu em seu *Liber abaci* o conhecimento adquirido e da importância da sua obra. No entanto, a questão é: Houve outras fontes de inspiração para os mestres de ábaco além de Fibonacci? Høyrup tem realizado um grande trabalho nessa temática que se baseia na tese do “patrimônio desconhecido”, construída a partir de indícios de aspectos linguísticos e contextuais. Um de seus trabalhos é uma análise cuidadosa do mais antigo tratado de ábaco que conhecemos, O *Livro de l'abbecho*, que parece ter sido escrito em torno dos anos 1288-1290 na Úmbria. Høyrup (2007a) mostra que o texto possui uma parte que corresponde ao currículo básico das escolas de ábaco, que não tem relação nenhuma com Fibonacci. Outra parte que contém assuntos traduzidos do *Liber abaci*, mas que demonstram pouca compreensão do material

apresentado em seu tratado. Por exemplo, o autor não entende as notações de Fibonacci para frações compostas. Ao que parece o texto é o resultado de uma reunião de ideias de outros autores. Contudo, o compilador tinha algum conhecimento sobre práticas de cálculo, mas com pouco entendimento sobre a matemática de Fibonacci. A partir de sua análise, Høystrup (2007a) afirma que esse manual do ábaco não era uma tradição de Fibonacci, embora já fosse uma tradição. Não obstante, Franci (2003 apud Høystrup 2007a p.41) indica ser uma cópia do trabalho *liber minoris* que Fibonacci mencionou no *Liber abaci*.

Franci (2010) também analisou, à luz da álgebra, quatro manuscritos italianos datados entre os anos 1307 e 1330. Sua percepção é que parecem independentes um dos outros, no entanto compartilham de características comuns que não são identificadas com o *Liber abaci* nem com traduções latinas de al-Kwarizmi (uma das fontes de Fibonacci). Franci e Høystrup concordam sobre a possibilidade de que tais características derivem de fontes árabes desconhecidas até o momento, já que não há nenhum tratado árabe contendo um tratado de álgebra semelhante ao italiano.

Høystrup (2010), na análise do tratado de Jacopo de Florença, *Tractatus algorismi*, escrito em 1307 em Montepellier, defende a hipótese de que suas fontes árabes podem ser encontradas na matemática mu'āmalāt⁸. No entanto, não há consenso sobre como esse conhecimento chegou à Itália.

Ainda faltam muitas partes desse quebra-cabeça, pois muito desse processo não deixou vestígios permanentes. Na Itália é mais bem documentado, pois a classe dominante, burguesia, era formada pelos comerciantes que tinham os livros de matemática como bens de prestígio. Sendo, portanto, melhor conservados do que os livros semelhantes em outros lugares. Essa falta de materialidade leva o próprio Høystrup (2010) à uma “conclusão pessimista” sobre sua tese de reconstrução desse “patrimônio desconhecido” quanto à existência desta herança, visto que ainda há muito a ser conhecido, se é que pode ser conhecido.

Conclusão

Podemos perceber três expoentes da transmissão e difusão dos algarismos indo-arábicos: as escolas, os mestres e os manuais de ábaco centrados na figura de Fibonacci.

Fibonacci exerce um papel fundamental, mesmo que não seja único, na interpretação corrente acerca da disseminação dos algarismos indo-arábicos na Europa Ocidental. Assim como nas escolas de ábaco e, conseqüentemente, nos manuais de ábaco. Alguns pesquisadores, como Franci e Høystrup, concordam sobre a possibilidade de que escritores de manuais de ábaco conhecessem fontes árabes que não fossem as mesmas de Fibonacci. No entanto, não discordam categoricamente da interpretação comum. Vale ressaltar que a obra de Fibonacci, o *Liber abaci*, até o momento, é o mais significativo exemplo de uma literatura matemática abrangendo as duas margens do Mediterrâneo, em grande parte perdida.

⁸ O *Liber mahameleth* é uma obra latina escrita em meados do século XII baseada (principalmente) em fontes árabes da Espanha islâmica. O título do trabalho reflete o árabe mu'āmalāt ([a matemática do] intercâmbio social). (Høystrup, 2013, p.2)

Nesse época, a Itália era um dos países mais avançados em estrutura econômica e a matemática do ábaco atendia às necessidades emergentes da nova classe mercantil. A partir dessa necessidade, uma instrução matemática, ligada à uma estrutura econômica e social, foi organizada e desenvolvida em algumas cidades italianas, as chamadas escolas de ábaco. Essa forma como a instrução matemática se estruturou na Itália no período observado é significativa, pois exemplifica a influência que a sociedade pode ter na educação. As necessidades do mercado de trabalho e os conhecimentos básicos necessários ao cidadão para exercer as operações indispensáveis no cotidiano social e econômico traduzem a educação matemática como um fenômeno social. Portanto, a forma como o ensino de matemática é organizado muda de acordo com as modificações do meio social e do saber fazer.

Apesar de escreverem livros mais simples, em conteúdo, do que o *Liber abaci*, os mestres de ábaco tiveram um papel fundamental, pois traduziram do latim para o vernáculo de forma didática a matemática do ábaco, ampliando significativamente o público que poderia ter acesso às novas técnicas de contagem o que tornou essas ferramentas acessíveis não só à totalidade do mundo mercantil letrado, mas a toda comunidade.

Assim como as escolas de ábaco, os manuais de ábaco se difundiram por um caminho interno italiano e a correlação entre eles e as práticas comerciais sugere que os mesmos foram um condutor da adoção dos algarismos indo-arábicos na Europa. E que a transição dos algarismos romanos para os indo-arábicos foi um processo iniciado na Itália no final do século XII e que levou quase três séculos para ser concluído. A forma como se propagou a produção dos manuais de ábaco sugere que os algarismos indo-arábicos e sua aritmética permaneceu um monopólio italiano até o final do século XV.

Bibliografia

DANNA, Raffaele. 2019. Una scienza per la rinascita. Note su paolo dell'abaco e la matematica abacistica fiorentina. In: *Rinascimento*, vol.59. 245–269.

DANNA, Raffaele. 2021. Figuring out: The spread of hindu-arabic numerals in the european tradition of practical mathematics (13th–16th centuries). In: *Nuncios*, vol.36, n° 1. 5–48.

EVES, Howard. 2004. Introdução à história da matemática. Campinas: Editora da Unicamp.

FRANCI, Raffaella. 2002. Il Liber abaci di Leonardo Fibonacci 1202-2002. La matematica nella società e nella cultura, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana 8: 293–328.

FRANCI, Raffaella. 2010. The History of Algebra in Italy in the 14th and 15th centuries. Some remarks on recent historiography. Actes d'història de la Ciència i de la tècnica, Nova Època. vol.3 (2). 175–194.

GIUSTI, Enrico. 2002. Matematica e commercio nel Liber Abaci. In Giusti, E. (ed), Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente. Firenze: Edizioni Polistampa, 59–120.

GUIMARÃES FILHO, J. dos S.; BRANDEMBERG, J. C. 2021. Sobre a divulgação do Sistema Indo-Arábico na Europa no século XIII. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, [S. l.], v. 7, n. 20, 380–391.

HØYRUP, Jens. 2018. Abacus School. In: Sgarbi, M. (eds) Enciclopédia da Filosofia do Renascimento. Springer, Cham.1–6.

HØYRUP, Jens. 2003. Mu‘amalāt and otherwise in the *Liber mahamaeth*: Contribution to Le 11 ième Colloque Maghrébin sur l’histoire des mathématiques arabes, École normale Supérieure, Kouba – Alger, 26, 27, 28 octobre 2013. Preprint.

HØYRUP, Jens. 2010. Fibonacci – Protagonist or Witness? Who Taught Catholic Christian Europe about Mediterranean Commercial Arithmetic? *Paper presented at the workshop Borders and Gates or Open Spaces? Knowledge Cultures in the Mediterranean During the 14th and 15th Centuries*, Departamento de Filosofia y Lógica, Universidad de Sevilla, 17–26.

HØYRUP, Jens. 2007. Jacopo da Firenze’s Tractatus Algorismi and Early Italian Abacus Culture. Basel: Birkhäuser Verlag AG, 27–44.

HØYRUP, Jens. 2007. “The ‘Unknown Heritage’: trace of a forgotten locus of mathematical sophistication, Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetscenter, 3. Række: Preprints og reprints, no. 1. Preprint. Published as “The ‘Unknown Heritage’: trace of a forgotten locus of mathematical sophistication”, *Archive for history of Exact Sciences* 62(2008): 613–654

HØYRUP, Jens. 2005. Leonardo Fibonacci and Abacus Culture: a Proposal to Invert the Roles. In: *Revue d’Histoire des Mathématiques*, vol. 11, 23–56.

MENDONÇA, Raquel Gomes Rosa de. 2021. Um retrato histórico da adoção do sistema numérico indo-arábico pela Europa Ocidental e o papel do Liber abaci. 150 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

SPIESSER, Maryvonne. 2004. Questions sur la diffusion du Liber Abaci en France au XV^e Siècle à Travers l’étude des traités commerciaux. *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, Anno 14, n° 1, 115–135 (Leonardo Fibonacci, Matematica e società nel Mediterraneo nel secolo XIII, II).

PEPE, Luigi. 2002. La riscoperta di Leonardo Pisano. In Giusti, E. (ed), Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente. Firenze: Edizioni Polistampa, 161–175.

TANGHERONI, Marco. 2002. Pisa e il Mediterraneo all'epoca di Fibonacci. In Giusti, E. (ed), Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente. Firenze: Edizioni Polistampa, 45–58.

ULIVI, Elisabetta. 2002. Scuole e maestri d'abaco in Italia tra medioevo e rinascimento. In Giusti, E. (ed), Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente. Firenze: Edizioni Polistampa, 121–160.

ULIVI, Elisabetta. 2015. Masters, questions and challenges in the abacus schools. Archive for History of Exact Sciences. vol.69, n°. 6. 651–70. <http://www.jstor.org/stable/24569657>

Raquel Gomes Rosa de Mendonça
Secretaria Municipal de Educação de Duque de
Caxias – SME – Duque de Caxias - Brasil

E-mail: quel_rosa@yahoo.com.br

João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho
Programa Profmat – IME – UERJ – Rio de Janeiro -
Brasil

E-mail: jbpfcarvalho@gmail.com

Patrícia Nunes da Silva
Departamento de Análise Matemática – UERJ –
Rio de Janeiro - Brasil

E-mail: nunes@ime.uerj.br