Traduções
Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática – Vol. 23, nº 46 – pp. 179–193
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

UM ESTUDO DA CORDA VIBRANTE POR BROOK TAYLOR (1685–1731): *DE MOTU NERVI TENSI* (SOBRE O MOVIMENTO DE UMA CORDA TENSA)

Oscar João Abdounur
Universidade de São Paulo – USP – Brasil

Glauco Aparecido de Campos
Instituto Federal de São Paulo – IFSP – Brasil

(aceito para publicação em janeiro de 2023)

Resumo

O objetivo deste artigo é traduzir o texto *De motu Nervi tensi* (Sobre o movimento de uma corda tensa) de 1713 do matemático inglês Brook Taylor (1685–1731), cujo intuito é descrever o movimento de uma corda vibrante com forte ênfase no seu número de vibrações em um determinado tempo. Fazendo uso da estrutura axiomática para cumprir tal finalidade, Taylor lança mão de princípios geométricos e mecânicos, este último com forte fundamento na obra Principia de Isaac Newton. Um aspecto notável do texto de Taylor é o estabelecimento de uma relação com o pêndulo, com intuito de calcular o tempo períodico da corda vibrante. Tendo em vista preservar maior fidelidade à obra, utiliza-se como critério de tradução respeitar a sintaxe do texto original sempre que possível.

Palavras-chave: Taylor, corda vibrante, século XVIII, história da matemática.

[A STUDY ON VIBRATING STRING BY BROOK TAYLOR (1685–1731): DE MOTU NERVI TENSI (ON THE MOVEMENT OF A TENSE STRING)]

Abstract

The goal of this article is to translate the text *De motu Nervi tensi* (On the motion of a taut string) from 1713, which was written by the English mathematician Brook Taylor (1685–1731). The aim of such a text is to describe the motion of a vibrating string with strong emphasis on its number of vibrations at a given time. Using the axiomatic structure to fulfill this purpose, Taylor makes use of geometric and mechanical principles, the latter with a strong foundation in Isaac Newton's Principia. A remarkable aspect of Taylor's text is the establishment of a relationship with the pendulum, for the sake of calculating the periodic time of the vibrating string. In order to preserve greater fidelity to the work, it is used as a translation criterion to respect the syntax of the original text whenever possible.

Keywords: Taylor, vibrating string, 18th century, history of mathematics.

1. Introdução

Este artigo trata da tradução do texto *De motu Nervi tensi* (Sobre o movimento de uma corda tensa) de Brook Taylor (1685–1731). O estudioso inglês escreveu tal texto em 1713, como um artigo no Philosophical Transactions, vol. 28, pp. 26–32. Trata-se de um texto em formato axiomático em que Taylor se propõe a descrever o movimento da corda tensa (Problema 1), bem como determinar o tempo de uma vibração desta corda (Problema 2), estabelecendo para isto dois lemas. Taylor lança mão de princípios mecânicos, bem como de propriedades geométricas que articulados de forma axiomática permite demonstrar os fenômenos mencionados.

O Lema 1 demonstra que se há uma certa proporção entre dois pontos diferentes de uma curva em momentos diferentes, suas curvaturas em um desses pontos nestes momentos seguem a mesma razão de semelhança. O Lema 2 afirma que em qualquer ponto da corda tensa, em qualquer momento de sua vibração, a aceleração gerada pela força de tensão da corda é como a curvatura da corda no mesmo ponto.

Fazendo uso da Proposição 51 da Seção X do Principia de Newton, o Problema 1 propõe-se a determinar o movimento da corda tensa concluindo que todos os pontos da corda vibram com o mesmo tempo periódico e que cada ponto comporta-se de forma semelhante à oscilação do corpo do pêndulo da corda na ciclóide.

Fazendo uso ainda de resultados do Principia de Newton no Problema 2, agora em particular da Proposição 52 da Seção X, Taylor calcula o tempo de uma vibração da corda, a partir do seu comprimento e do peso pelo qual ela está tensionada. Para tal empreendimento, ele constrói um pêndulo isócrono cujo comprimento portanto faz com que tal objeto tenha o mesmo período de oscilação que a corda em questão, reduzindo o problema de cálculo do período de oscilação da corda ao do período de oscilação do pêndulo, cujas propriedades são conhecidas.

Ao relacionar o movimento de uma corda vibrante com o movimento de um pêndulo, Taylor implicitamente associa o movimento da corda a uma função senoidal.

Apresenta-se em seguida a tradução da obra De motu Nervi tensi, mencionada pelo estudioso Daniel Bernoulli (1700-1782) no seu estudo intitulado Refléxions et Eclaircissements sur les Nouvelles Vibrations des Cordes Exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1747 e 1748.

Bibliografia

TAYLOR, Brook. IV. De motu nervi tensi. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 28, n. 337, p. 26–32, 1713.

TAYLOR, Brook. Of the Motion of a Tense String. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 6, p. 14–17, 1809.

TORRINHA, Francisco. Dicionário latim-português. **Porto: Gráficos Reunidos**, 1986.

TRUESDELL, Clifford. The rational mechanics of flexible or elastic bodies: 1638-1788. **Leonhardi Euleri Opera Omnia, Ser. 2**, 1960.

Oscar João Abdounur
Departamento de Matemática – Mat – campus São Paulo – Brasil

E-mail: abdounur@ime.usp.br

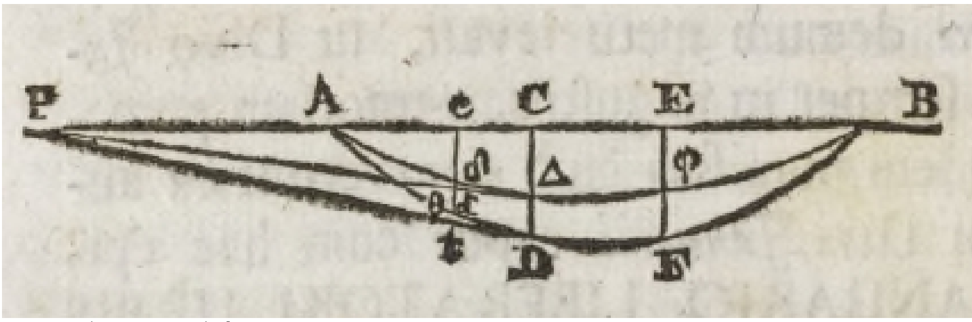
Glauco Aparecido de Campos
Instituto Federal de São Paulo – IFSP – campus de Bragança Paulista – Brasil

E-mail: glaucodecampos@ifsp.edu.br

2. Tradução

IV. Sobre o movimento de uma corda tensa

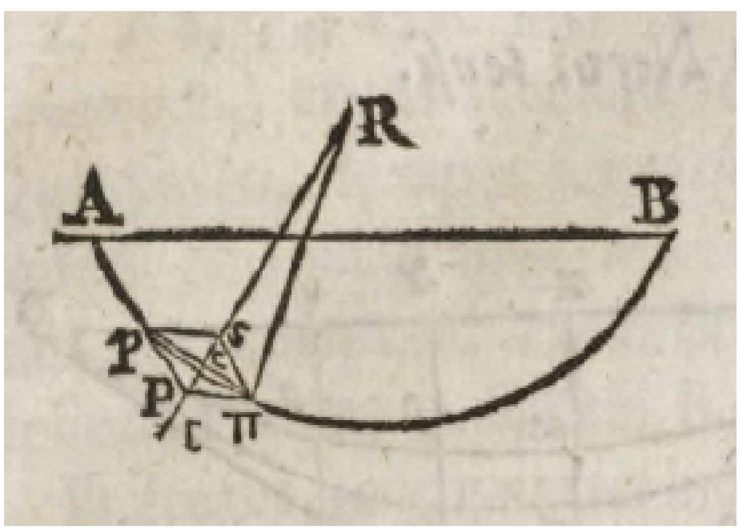
Lema I.



Sejam $ADFB$ e $A\,\Delta\,\phi B$ duas curvas, cuja relação é tal que quando são movimentadas livremente, quaisquer ordenadas $C\,\Delta\,D$, $E\phi F$, satisfazem $C\,\Delta : CD :: E\phi : EF$. Então as ordenadas são diminuídas *ad infinitum*, de modo que as curvas coincidam com o eixo AB; digo que a razão final da curvatura em Δ para a curvatura em D é a mesma que $C\,\Delta$ para CD.

Demonstr. Conduza a ordenada $c\delta d$ muito próxima a CD; e conduza para D e Δ tangentes Dt e $\Delta\theta$ concorrentes com a ordenada cd em t e θ. Então, dado que $c\delta : cd :: C\,\Delta : CD$ (por hipótese), as tangentes prolongadas concorrem uma para a outra e no eixo no mesmo ponto P. De onde, dado que os triângulos CDP e ctP, $C\,\Delta\,P$ e $c\theta P$, são semelhantes, então $c\theta : ct :: C\,\Delta : CD$ (:: $c\delta : cd$, por hip) :: $\delta\theta$ $(c\theta - c\delta)$ para dt $(ct - cd)$. Na verdade, as curvaturas em Δ e D são como os ângulos de contato $\theta\,\Delta\,\delta$ e tDd; e porque $\delta\,\Delta$ e dD são coincidentes com cC, esses ângulos são como os subtensos $\delta\theta$ e dt, isto é (por analogia acima encontrada) como $C\,\Delta$ e CD. Portanto etc. C. Q. D.

Lema II.

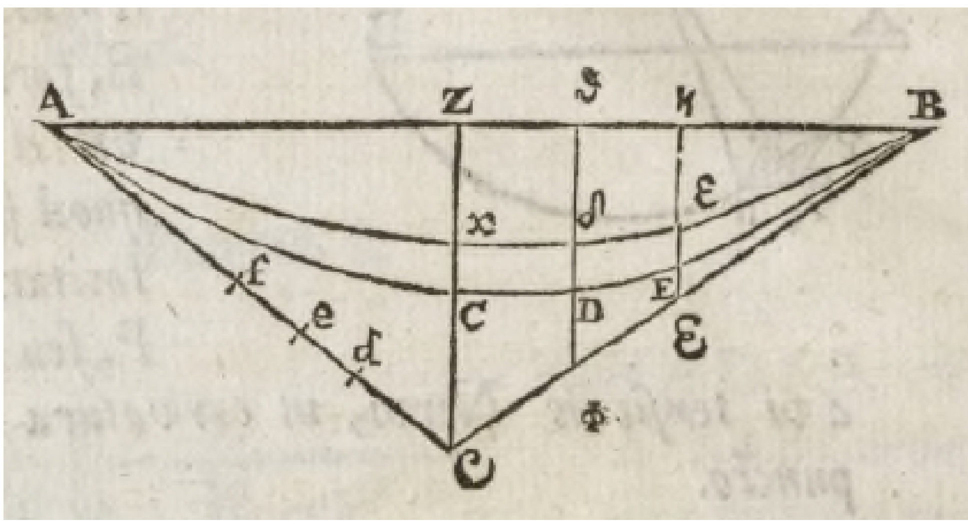


Em qualquer momento de sua vibração, considere que a corda tensa assuma, entre os pontos A e B, qualquer forma da curva $Ap\pi B$. Então eu digo que haverá um aumento na velocidade de um ponto qualquer P, ou uma aceleração decorrente da força da tensão da corda, como a curvatura da corda no mesmo ponto.

Demonstr. Imagine que a corda consista em partículas rígidas iguais infinitamente pequenas pP e $P\pi$, etc. e até o ponto P levante a perpendicular $PR =$ o raio da curvatura em P, na qual as tangentes pt e πt se encontrem em t, suas paralelas πs e ps em s, e a corda $p\pi$ em c. Então, pelos Princípios da Mecânica, a força absoluta, com a qual ambas as partículas são pressionadas, será igual à força de tração do fio, como st para pt; e metade dessa força, pela qual uma partícula pP é expelida, estará para a tensão da corda, como ct para tp, isto é, (porque os triângulos ctp e tpR são semelhantes) como tp ou Pp para Rt ou PR. Portanto, uma vez que a força de tração é dada, estará para a força de aceleração como $\frac{Pp}{PR}$. Mas a aceleração gerada está na razão composta das razões da força absoluta diretamente e da matéria em movimento inversamente; e a matéria em movimento é ela própria a partícula Pp. Portanto, a aceleração é como $\frac{1}{PR}$, isto é, como a curvatura em P. A curvatura é de fato reciprocamente como o raio do círculo osculador. C. Q. D.

Prob. 1. Definir o movimento de uma corda tensa

Neste problema e nos seguintes, suponho que a corda se mova por um espaço mínimo a partir do eixo de movimento; de modo que o incremento na tensão devido ao aumento do comprimento, bem como a obliquidade da curvatura dos raios, pode ser negligenciado com segurança.



Assim, deixe a corda ser esticada entre os pontos A e B; e por meio de um plectro,[1] o ponto z é trazido a uma distância Cz do eixo AB. Então, quando o plectro é removido, devido à flexão somente no ponto C, ela primeiro começará a se mover (pelo Lema 2). Mas assim que a corda for curvada nos pontos próximos a ϕ e d, esses pontos também começarão a se mover; e então E e e, e assim por diante. Além disso, por causa da grande curvatura em C, esse ponto primeiramente será movido muito rapidamente; e, portanto, sendo aumentada a curvatura nos pontos mais próximos D, E, etc., eles continuarão a ser acelerados mais rápido; e da mesma forma, sendo a curvatura em C diminuída, esse ponto, por sua vez, será acelerado mais lentamente. E em geral, aqueles pontos mais lentos sendo mais acelerados e os mais rápidos sendo menos acelerados, enfim acontecerá que, com suas forças devidamente equilibradas entre si, todos os movimentos conspirem, com todos os pontos indo ao eixo ao mesmo tempo e retornando ao mesmo tempo, alternadamente *ad infinitum*. E de modo geral, aqueles pontos mais lentos sendo mais acelerados e os mais rápidos, menos acelerados, enfim acontecerá que, com suas forças devidamente equilibradas entre

[1] Plectro: varinha de marfim com que se tocavam as cordas da lira (TORRINHA, 1986).

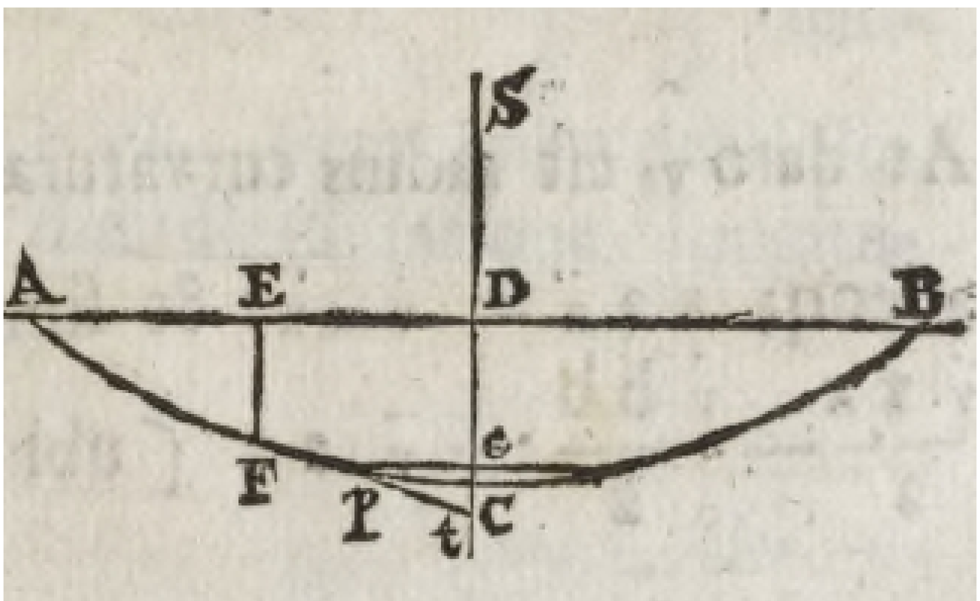
si, todos os movimentos conspirem, com todos os pontos indo ao eixo ao mesmo tempo e retornando ao mesmo tempo, alternadamente *ad infinitum*.

Mas para que isso possa ser feito, a corda sempre deve assumir a forma de uma curva $ACDEB$, cuja curvatura em qualquer ponto E é igual à distância do eixo $E\eta$, sendo também as velocidades dos pontos C, D, E, etc. na razão das distâncias do eixo Cz, $D\vartheta$, $E\eta$, etc. De fato, neste caso, os espaços Cx, $D\delta$, $E\varepsilon$, etc. percorridos no mesmo tempo mínimo, estão entre si como velocidades, isto é, como espaços Cz, $D\vartheta$, etc. a serem percorridos. Portanto, os espaços restantes xz, $\delta\vartheta$, $\epsilon\eta$, etc. estão entre si na mesma razão. Do mesmo modo (pelo Lema 2), as acelerações estão entre si na mesma razão. Por este acordo, mantendo sempre a razão de velocidades entre si a mesma, assim como a das distâncias percorridas, todos os pontos atingem o eixo ao mesmo tempo e retornam ao mesmo tempo: portanto, a curva $ACDEB$ está definida corretamente. C. Q. D.

Além disso, comparando entre si as duas curvas $ACDEB$ e $Ax\delta\varepsilon B$, pelo Lema 1, as curvaturas em D e δ, são como a distância do eixo $D\vartheta$ e $\delta\vartheta$; assim, pelo Lema 2, a aceleração de qualquer ponto dado na corda é como a sua distância do eixo. Assim (por Phil. Nat. Princip. Math. Sect. X. Prop. 51), todas as vibrações, tanto a maior quanto a menor, são realizadas no mesmo tempo periódico, e o movimento de cada ponto é como a oscilação do corpo do pêndulo da corda na ciclóide.

Cor. As recíprocas das curvaturas são como os raios dos círculos osculadores. Portanto, seja a reta dada a, então o raio de curvatura é em $E = \frac{aa}{E\eta}$.

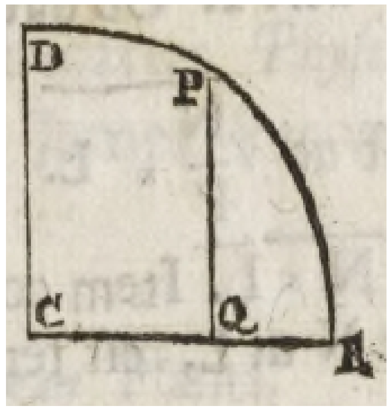
Prob. 2. Dados o comprimento e o peso da corda, junto com o peso que a estica, encontrar o período de uma vibração



Estenda-se a corda entre os pontos Ae Bpela força do peso P, e seja o peso da própria corda N e seu comprimento L. Da mesma forma, a corda é colocada na posição $AFpCB$, e no ponto médio C eleva-se a normal $CS =$ o raio de curvatura em C, encontrando o eixo AB em D; e tomando um ponto p próximo ao próprio C, trace a normal pc e a tangente pt.

Portanto, conforme o Lema 2, estabelece-se que a força absoluta com a qual a partícula pC é acelerada está para a força do peso P, assim como ct está para pt, i.e., assim como pC está para CS. Mas o peso P está para o peso da própria partícula pC, na razão composta das razões de P para N, e N para o peso da partícula pC, ou L para pC;

isto é, assim como $P \times L$ para $N \times pC$. Portanto, somando essas razões, a força aceleradora está para a força da gravidade assim como $P \times L$ está para $N \times CS$. Desse modo, é constituído um pêndulo de comprimento CD: então (pelo Principia Mat. Seção X. Prob. 52), o tempo periódico da corda está para o tempo periódico do pêndulo como $\sqrt{N} \times CS$ está para $\sqrt{P} \times L$. Mas (pela mesma proposição) dada a força da gravidade, os comprimentos dos pêndulos estão na razão dupla dos tempos periódicos; donde $\frac{N \times CS \times CD}{P \times L}$ ou (para CS escrito $\frac{aa}{CD}$, pelo Cor. Prob. I.) $\frac{N \times aa}{P \times L}$ será o comprimento do pêndulo cujas vibrações são isócronas com as vibrações da corda.



Para encontrar a reta a, seja a abscissa da curva $AE = z$, e a ordenada $EF = x$, e a própria curva $AF = v$, e $CD = b$. Então (pelo Cor. Prob. 1), será o raio de curvatura em $F = \frac{aa}{x}$. Mas dado $\dot v$, o raio de curvatura é $\frac{\dot v\, \dot x}{\ddot z}$. Donde $\frac{aa}{x} = \frac{\dot v\, \dot x}{\ddot z}$, portanto, $aa\,\ddot z = \dot v\, x\, \dot x$: e tomando os fluxos $aa\,\dot z = \frac{\dot v\, xx}{2} - \frac{\dot v\, bb}{2} + \dot v\, aa$ (onde a quantidade dada $-\dot v\, bb - \frac{\dot v\, bb}{2} + \dot v\, aa$ é adicionada, de modo que seja $\dot z = \dot v$ no ponto médio C). E daqui, concluído o cálculo, será $\dot z = \frac{a^2\,\dot x - \frac{1}{2}\,b^2\,\dot x + \frac{1}{2}\,x^2\,\dot x}{\sqrt{a^2\,b^2 - a^2\,x^2 - \frac{1}{4}\,x^4 - \frac{1}{4}\,b^4 + \frac{1}{2}\,b^2\,x^2}}$. Deixe desaparecer b e $x$com respeito a a, de modo que a curva coincida com o eixo e tornar-se-á $\dot z = \frac{a\,\dot x}{\sqrt{bb - xx}}$. Mas com o centro C e o raio $CD = b$ descrito pelo quadrante circular DPE, e feito $CQ = x$, e erigido ao QP normal, e o arco DP sendo y, $\dot y = \frac{b\,\dot x}{\sqrt{bb - xx}} = \frac{b}{a}\,\dot z$.

Donde $y = \frac{b}{a}\,z$, e $z = \frac{a}{b}\,z$. E feito $x = b = CD$, (onde caso também seja $y =$ arco do quadrante DPE, e $z = AD = \frac{1}{2}\,L$), será $\frac{1}{2}\,L = a \times \frac{DE}{CD}$, e, portanto, $a = L \times \frac{CD}{2\,DE}$. Seja, portanto, CD para $2\,DE$ (assim como o diâmetro do círculo está para a circunferência) assim como d está para c; portanto, $aa = \times \frac{dd}{cc}$. Substituído assim, este valor por aa, $\frac{N}{P} \times L \times \frac{dd}{cc}$ será o comprimento do pêndulo isócrono para a corda. Seja, portanto, D o comprimento cujo tempo periódico é 1, assim $\frac{d}{c}\sqrt{\frac{N}{P} \times \frac{L}{D}}$ será o tempo periódico da corda. Q. E. I. Estão de fato os tempos periódicos dos pêndulos como a metade[2] da razão dos comprimentos.

[2] Nessa época não é incomum na tradição matemática referir-se à metade como sendo a média geométrica, anacronicamente falando.

Cor. I. O número de vibrações da corda no tempo de uma vibração do pêndulo D é $\frac{c}{d} \times \sqrt{\frac{P}{N} \times \frac{D}{L}}$.

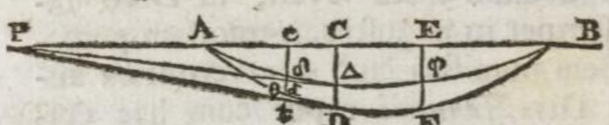
Cor. II. Uma vez que é dado $\frac{d}{c} \times \sqrt{\frac{1}{D}}$, o tempo periódico da corda é como $\sqrt{\frac{N}{P} \times L}$. E sendo dado o peso P, o tempo é como $\sqrt{N \times L}$. Da mesma forma, as cordas sendo constituídas a partir do mesmo fio, caso em que N se torna como L, então o tempo é como L.

3.Texto Original

(26)

IV. *De motu Nervi tenſi. Per* Brook Taylor *Armig. Regal. Societat. Sodal.*

Lemma I.

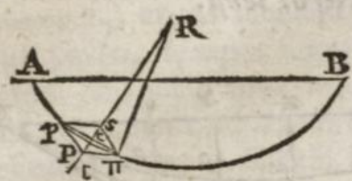


Sint A D F B, *&* A Δ Φ B *Curvæ duæ, quarum relatio inter ſe hæc eſt, ut, ductis ad libitum ordinatis* C Δ D, E Φ F, *ſit* C Δ : C D : : E Φ : E F. *Tum ordinatis in infinitum imminutis, adeo ut coincidant Curvæ cum axe* A B; *dico quod ſit ultima ratio curvaturæ in* Δ *ad curvaturam in* D, *ut* C Δ *ad* C D.

D*Emonſtr.* Duc ordinatam c δ d ipſi C D proximam; & ad D & Δ duc tangentes D t & Δ θ, ordinatæ c d occurrentes in t & θ. Tum ob c δ : c d : : C Δ : C D (per Hypotheſin) tangentes productæ ſibi invicem & axi occurrent in eodem puncto P. Unde ob triangula ſimilia C D P & c t P, C Δ P & c θ P, erit c θ : c t : : C Δ : C D (: : c δ : c d, per Hyp) : : $\delta\theta$ (= c θ - c δ) ad d t (= c t - cd.) Atqui ſunt curvaturæ in Δ & D, ut anguli contactûs θ Δ δ & t D d; & ob δ Δ & d D coincidentes cum c C, anguli iſti ſunt ut eorum ſubtenſæ $\delta\theta$ & d t, hoc eſt (per analogiam ſupra inventam) ut C Δ & C D. Quare, *&c.* Q. E. D.

Lemma

Lemma 2.



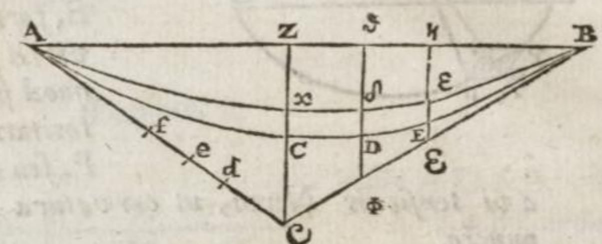
In aliquo articulo vibrationis ſuæ induat Nervus tenſus, inter puncta A & B, formam curvæ cujusvis A p π B. Tum dico quod ſit incrementum velocitatis puncti alicujus P, ſeu acceleratio oriunda a vi tenſionis Nervi, ut curvatura Nervi in eodem puncto.

Demonſtr. Finge Nervum conſtare ex particulis rigidis æqualibus infinite parvis p P & P π, *&c.* & ad punctum P erige perpendicularem P R = radio curvaturæ in P, cui occurrant tangentes p t & π t in t, iis parallelæ π s & p s in s, & chorda p π in c. Tum, per Principia Mechanicæ, vis abſoluta, quâ urgentur particulæ ambæ p P & P π verſûs R, erit ad vim tenſionis fili, ut s t ad p t; & hujus vis dimidium, quo urgetur particula una p P, erit ad Nervi tenſionem, ut c t ad t p, hoc eſt, (ob triangula ſimilia c t p, t p R) ut t p vel P p ad R t vel P R. Quare, ob tenſionis vim datam, erit vis acceleratrix abſoluta ut $\frac{P\,p}{P\,R}$. Sed eſt acceleratio genita in ratione compoſitâ ex rationibus vis abſolutæ directè & materiæ movendæ inverſè; atq; eſt materia movenda ipſa particula P p. Quare eſt acceleratio ut $\frac{1}{P\,R}$, hoc eſt ut Curvatura in P. Eſt enim Curvatura reciprocè ut radius circuli oſculatorii. Q. E. D.

E 2 Prob. 1.

Prob. 1.

Definire motum Nervi tenſi.



In hoc Problemate & ſequentibus pono Nervum moveri per ſpatium minimum ab axe motûs; ut incrementum tenſionis ex auctâ longitudine, item obliquitas radiorum curvaturæ poſſint tutò negligi.

Itaq; extendatur Nervus inter puncta A & B; & plectro deducatur punctum z ad diſtantiam *C* z ab axe A B. Tum amoto plectro, ob flexuram in puncto ſolo *C*, illud primum incipiet moveri (*per Lemma* 2.) At ſtatim inflexo Nervo in punctis proximis Φ & d, incipient hæc puncta etiam moveri; & deinde E & e, & ſic deinceps. Item ob magnam flexuram in *C*, illud punctum primò velociſſime movebitur; & exinde auctâ curvaturâ in punctis proximis *D*, *E*, *&c.* ea continuo velocius accelerabuntur; & eâdem operâ, imminutâ curvaturâ in C, id punctum viciſſim tardius accelerabitur. Et univerſaliter, punctis juſtò tardioribus magis & velocioribus minùs acceleratis, tandem fiet ut viribus inter ſe ritè temperatis, motus omnes conſpirent, punctis omnibus ad axem ſimul euntibus & ſimul redeuntibus, vicibus alternis ad infinitum.

Sed ut hoc fiat debet Nervus ſemper induere formam curvæ A C D E B, cujus curvatura in quovis puncto E eſt ut ejuſdem diſtantia ab axe E η; velocitatibus etiam punctorum C, D, E, *&c.* conſtitutis inter ſe in ratione diſtantiarum ab axe C z, D ς, E η, *&c.* Etenim in hoc caſu,

(29)

caſu, ſpatia C x, D δ, E ε, *&c.* eodem tempore minimo percurſa, erunt inter ſe ut velocitates, hoc eſt ut ſpatia percurrenda C z, D ϑ, *&c.* Unde erunt ſpatia reſidua x z, δ ϑ, ε η, *&c.* inter ſe in eâdem ratione. Item (*per Lemma* 2.) erunt accelerationes inter ſe in eâdem ratione. Quo pacto, ſemper ſervatâ ratione velocitatum inter ſe eâdem ac ſpatiorum percurrendorum, puncta omnia ſimul pervenient ad axem & ſimul redibunt: adeoq; rectè definitur curva A C D E B. Q. E. D.

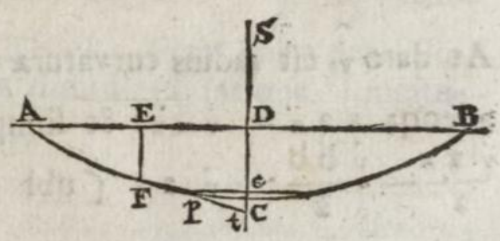
Præterea, comparatis inter ſe duabus curvis A C D E B, & A x δ ε B, *per Lemma* 1. erunt curvaturæ in D & δ, ut diſtantiæ ab axe D ϑ & δ ϑ: adeoq; *per Lemma* 2. acceleratio dati cujuſvis puncti in Nervo erit ut ejuſdem diſtantia ab axe. Unde (*per Phil. Nat. Princip. Math. Sect.* X. *Prop.* 51.) vibrationes omnes, tam maximæ quam minimæ, peragentur in eodem tempore periodico, & puncti cujuſvis motus ſimilis erit oſcillationi corporis Funipenduli in Cycloide. Q. E. I.

Cor. Sunt Curvaturæ reciprocè ut radii circulorum oſculantium. Sit ergo *a* linea data, atq; erit radius curvaturæ in E $= \frac{aa}{E\eta}$.

Prob. 2.

Datis longitudine & pondere Nervi, unà cum pondere tendente; invenire tempus unius vibrationis.

Extendatur nervus inter puncta A & B per vim ponderis P, & ſit nervi ipſius pondus N, & longitudo L. Item conſtituatur nervus in poſitione A F p C B, & ad



punctum

(30)

punctum medium C erige normalem C S = radio curvaturæ in C, & occurrentem axi A B in D; & sumpto puncto p ipsi C proximo, duc normalem p c & tangentem p t.

Ergo, ut in Lemmate 2, constat vim absolutam quâ acceleratur particula p C, esse ad vim ponderis P, ut c t ad p t, i. e. ut p C ad C S. Sed est pondus P ad pondus ipsius particulæ p C, in ratione compositâ ex rationibus P ad N, & N ad pondus particulæ p C, vel L ad p C; hoc est, ut P × L ad N × p C. Quare compositis his rationibus, est vis acceleratrix ad vim gravitatis ut P × L ad N × C S. Constituatur itaque pendulum longitudine C D: tum (*per Princip. Math. Sect. X. Prob.* 52.) erit tempus periodicum Nervi ad tempus periodicum istius penduli, ut $\sqrt{N \times}$ C S ad $\sqrt{P \times}$ L: At (per eandem Proposit.) datâ vi gravitatis longitudines pendulorum sunt in duplicatâ ratione temporum periodicorum; unde erit $\frac{N \times CS \times CD}{P \times L}$, vel (pro C S scripto $\frac{aa}{CD}$, *per Cor. Prob.* 1.) $\frac{N \times aa}{P \times L}$ longitudo penduli cujus vibrationes sunt isochronæ vibrationibus Nervi.

Ad inveniendam lineam a, sit Curvæ abscissa A E = z, & ordinata E F = x, & ipsa Curva A F = v, & C D = b. Tum (*per Cor. Prob.* 1.) erit radius curvaturæ in F = $\frac{aa}{x}$

At dato $\dot{v}$ est radius curvaturæ $\frac{\dot{v}\dot{x}}{\ddot{z}}$. Unde $\frac{aa}{x} = \frac{\dot{v}\dot{x}}{\ddot{z}}$; adeoq; $aa\ddot{z} = \dot{v}x\dot{x}$: & sumptis fluentibus $aa\dot{z} = \frac{\dot{v}xx}{2} - \frac{\dot{v}bb}{2} + \dot{v}aa$ (ubi additur data quantitas

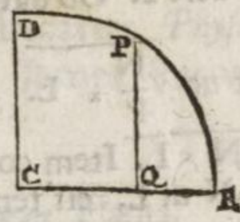
— $\dot{v}$bb

RBHM, Vol. 23, nº 46, pp. 179–193, 2023

(31)

$\frac{-\dot{v}\,b\,b}{2} + \dot{v}\,a\,a$, ut fiat $\dot{z} = \dot{v}$ in puncto medio C.) Et hinc peracto calculo erit $\dot{z} = \frac{a^2\dot{x} - \frac{1}{2}b^2\dot{x} + \frac{1}{2}x^2\dot{x}}{\sqrt{a^2b^2 - a^2x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{2}b^2x^2}}$

Evanescant jam b & x respectu a, ut coincidat curva cum axe, & fiet $\dot{z} = \frac{a\dot{x}}{\sqrt{bb - xx}}$. At



centro C & radio $CD = b$ descripto quadrante circulari DPE, & facto $CQ = x$, & erectâ normali QP, atque arcu DP existente y, erit $\dot{y} = \sqrt{}\frac{b\dot{x}}{bb - xx} = \frac{b}{a}\dot{z}$.

Unde $y = \frac{b}{a}z$, & $z = \frac{a}{b}y$. Et facto $x = b = CD$, (quo casu etiam fit y = arcui quadrantali DPE, & $z = AD = \frac{1}{2}L$) erit $\frac{1}{2}L = a \times \frac{DE}{CD}$, atq; $a = L \times \frac{CD}{2DE}$. Sit ergo CD ad 2DE (ut diameter circuli ad circumferentiam) ut d ad c; atq; erit $aa = LL \times \frac{dd}{cc}$. Substituto itaq; hoc valore pro a a, erit $\frac{N}{P} \times L \times \frac{dd}{cc}$ longitudo penduli isochroni ipsi Nervo. Sit ergo D longitudo cujus tempus periodicum est 1, atq; erit $\frac{d}{c}\sqrt{\frac{N}{P} \times \frac{L}{D}}$ tempus periodicum Nervi. Q. E. I. Sunt enim pendulorum tempora periodica in dimidiatâ ratione longitudinum.

Cor. 1.

(32)

Cor. 1. Numerus vibrationum Nervi in tempore unius vibrationis penduli D eſt $\frac{c}{d} \times \sqrt{\frac{P}{N} \times \frac{D}{L}}$.

Cor. 2. Ob datum $\frac{d}{c} \times \sqrt{\frac{1}{D}}$, tempus periodicum Nervi eſt ut $\sqrt{\frac{N}{P} \times L}$. Et dato pondere P eſt tempus ut $\sqrt{N \times L}$. Item conſtitutis Nervis ex eodem filo, quo caſu fit N ut L, eſt tempus ut L.

V.