Traduções
Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática – Vol. 23, nº 46 – pp. 229–257
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

A TEORIA DA LUA DE PIERRE-SIMON LAPLACE

Herbert Wesley Azevedo
Universidade Estadual de Goiás – UEG – Brasil

Thiago Freitas Candido de Jesus
Pesquisador independente – Brasil

(aceito para publicação em janeiro de 2023)

Resumo

Apresenta-se neste trabalho uma tradução do artigo "*Mémorie sur la théorie de la Lune*" de Pierre-Simon Laplace. Publicado originalmente em 1800, em francês, perante o *Institut national des Sciences et Arts* e anexado posteriormente em 1802 ao volume III, livro VII, do *Traité de mécanique céleste* e republicado em edições posteriores das *Oeuvres de Laplace* a pedido do rei francês Louis Philippe I em 1842. O artigo de Laplace é reconhecido por utilizar o cálculo diferencial com elegância e possui inúmeras implicações na Astronomia, além de grande importância nos subsequentes trabalhos dele, tais como o estudo da forma do planeta Terra e o movimento da Lua.

Palavras-chave: História da matemática, Astronomia, Laplace.

[THE MOON THEORY BY PIERRE-SIMON LAPLACE]

Abstract

This work presents a translation of the article "*Mémorie sur la théorie de la Lune*" by Pierre-Simon Laplace. Originally published in 1800, in French, before the *Institut national des Sciences et Arts* and later annexed in 1802 to volume III, book VII, of *Traité de mécanique céleste* and in future editions of *Oeuvres de Laplace* at the request of the French king Louis Philippe I in 1842. Laplace's article is recognized for using differential calculus with elegance and has numerous implications for astronomy, in addition to being of great importance in his subsequent works, such as the study of the shape of the planet Earth and the movement of the Moon.

Keywords: History of mathematics, Astronomy, Laplace.

1. Introdução

No decorrer da história, inúmeros matemáticos realizaram pesquisas significativas e alguns deles criaram uma vasta obra em diversos campos científicos, como o francês Pierre-Simon Laplace (1749–1827). No que tange a Astronomia, ele desenvolveu teorias matemáticas envolvendo o cálculo diferencial e chegou a resultados que contribuiram nos estudos da mecânica clássica. Investigou, por exemplo, o movimento dos astros e como suas órbitas estão relacionadas. Sua obra-prima *Traité de mécanique céleste* figura entre suas últimas pesquisas e reúne artigos e tópicos relacionados a Astronomia, como o artigo "Mémorie sur la théorie de la Lune", alvo dessa tradução, em que Laplace discute matematicamente uma anomalia no movimento da Lua e apresenta resultados científicos importantes: o formato da Terra, o formato da Lua, as influências planetárias de órbitas, entre outros.

A Astronomia, em especial o estudo dos movimentos de astros celestes, tem início no passado longínquo. Houve graduais avanços na área em relação a diferentes contextos históricos. Durante o século XVI, aconteceu uma cadeia de alterações sociais que, por consequência, permitiram o desenvolvimento da Astronomia, sendo elas: a crescente ascensão da burguesia; expansão colonial associada às Grandes Navegações; a explosão de ideias humanistas e a Reforma Protestante (VALENTIN, 2010, p. 61). O movimento humanista pregava a reflexão acerca do papel da Igreja e novas ideias, outrora blasfêmicas, ganharam espaço. Afirma-se "O homem é posto no centro das atenções e o pensamento científico começa a questionar algumas afirmações vigentes até então, inclusive religiosas [...] a Europa vê-se envolta numa efervescência contestadora" (VALENTIN, 2010, p. 63).

Nesse período, ocorreram mudanças significativas quanto à visão que a comunidade científica possuía da Mecânica Celeste, por exemplo, a teoria do heliocentrismo. No entanto, estagnou-se por quase um século no período entre 1605 e 1687 depois de Kepler (1571–1630) revelar seu modelo de sistema solar[1].O período entre 1640 e 1680 ficou marcado pelo aperfeiçoamento de instrumentos de observação astronômicas incentivando algumas construções de observatórios astronômicos na Europa: Paris (1671) e Greenwich (1676) (ROSA, 2012, p. 101). Rosa ainda destaca que o interesse pela Astonomia no século XVIII ocorreu devido ao apoio de governos com fins marítimos, geográficos, comerciais e militares (ROSA, 2012, p. 273).

Os dados coletados em observatórios eram mistos e indicavam incongruências. Soube-se a causa quando Isaac Newton (1643–1727) trouxe ao mundo as leis da gravitação universal em 1687. Os astros celestes interferem nos movimentos dos outros astros e não somente o sol. Apesar de Newton exercer enorme impacto na Astronomia e comprovar que os dados coletados apontavam para pontas soltas, não houve em sua época estudos matemáticos para explicar a influência mútua dos astros, senão apenas coletas cada vez mais detalhadas de observações do sistema solar. Curtis Wilson afirma:

> *"Assim, uma consequência primordial da teoria da gravitação universal de Newton, segundo a qual os planetas devam ser mantidos para perturbar os movimentos uns dos outros, permaneceu até agora sem*

[1] Leia (WILSON, 1985, pp. 15–24) para mais informações sobre.

> *efeito prático na forma e conteúdo das tabelas planetárias."* (WILSON, 1985, p. 16, tradução nossa)[2]

Anomalias foram reveladas e a academia demonstrou alto interesse em solucionar o mistério por trás destas. As disparidades entre os dados eram registradas a partir do momento em que os cálculos previstos não convergiram com as observações (WILSON, 1985, pp. 15–16).

As anomalias nos movimentos de Jupiter e Saturno foram uma das primeiras a serem registradas com as observações de Kepler nos anos finais de sua vida e posteriormente reafirmadas nas tábuas de Cassini (1625–1712), Halley (1656–1742) e Lacaille (1713–1762). Elas despertaram interesse particular de Euler (1707–1783), até mesmo foi premiado pela academia francesa nos anos de 1748 e 1752 em diferentes concursos por seus avanços. Em 1765, o problema, sem solução, chamou a atenção de outro nome histórico: Lagrange (1736–1813). Por fim, Laplace encerrou o assunto por volta de – 1787, quando desenvolveu e publicou na academia de Paris o artigo "*Un mémoire sur l'équation séculaire de la lune"* (WILSON, 1985, pp. 17–22).

Outras anomalias astronômicas foram registradas e legadas aos pesquisadores do século XVIII. Laplace particularmente as estudou com empenho, pois percebeu que poderia relacioná-las através da matemática a diversos fenômenos naturais, por exemplo: o movimento das marés; a forma da Terra; etc. O pensamento de Laplace e suas motivações enquanto pesquisador dessas anomalias foram registradas no livro *Essai philosophique sur les probabilités*, publicado por Laplace originalmente em 1814.

Destaca-se a introdução de Laplace:

> *"Desejo que as reflexões difundidas neste Ensaio possam merecer a atenção dos filósofos, e direcioná-la para um assunto tão digno de os ocupar.* [...] *Devemos, portanto, considerar o estado atual do universo como o efeito do seu estado anterior e como a causa do que se seguirá. Uma inteligência que, por um dado momento, conheceria todas as forças com que a natureza se anima e as respectivas situações dos seres que a compõem, se, além disso, fosse suficientemente vasta para submeter estes dados à análise, abraçaria na mesma fórmula os movimentos dos maiores corpos do universo e os do átomo mais leve; nada seria incerto para ela, e tanto o futuro como o passado estariam presentes aos seus olhos. A mente humana oferece, na perfeição que deu à Astronomia, um esboço ténue desta inteligência. As suas descobertas em Mecânica e Geometria, somadas às da gravidade universal, colocaram-no em posição de compreender nas mesmas expressões analíticas os estados passados e futuros do sistema do mundo."* (LAPLACE, 1814, pp. 1 – 3, tradução nossa)[3]

[2] Thus a prime consequence of Newton's theory of universal gravitation, in accordance with which the planets must be held to perturb one another's motions, had so far remained with out practical effect on the form and content of planetary tables.

Percebe-se que Laplace adotava o caráter determinístico para uma sociedade com conhecimentos suficientes e considerava que para esta finalidade era insuficiente o saber de sua época sobre o universo e tudo o que o compõe, por consequência, para entender melhor os eventos do passado e futuro era imprescindível o estudo dos fenômenos naturais, anomalias, etc. Fato é que em partes sua suposição foi respaldada por si mesmo ao apresentar resultados variados no *Traité de mécanique céleste* para questões físicas antes atribuídas à probabilidade.

Nesse contexto, surge o "*Mémorie sur la théorie de la Lune*". Laplace estudou as causas da anomalia de movimento, chamada nutação, detectada nos nodos lunares em um intervalo periódico entre dezessete e dezenove anos. O movimento de nutação da Lua é periódico e senoidal, além de estar diretamente ligado a outro fenômeno chamado precessão. Em termos simples, devido a lua não ser perfeitamente esférica, ao girar em torno de si mesma (rotação) em um eixo não reto (precessão) ela cria um movimento periódico não esperado em sua órbita chamado nutação.

A ideia de a Lua estar sempre com a mesma face voltada para a Terra é senso comum e há termos como "lado escuro" que geram ainda mais confusão, no entanto o que ocorre é o movimento síncrono que passa a impressão do satélite natural não rotacionar. Catelli e pesquisadores trazem uma explicação melhor detalhada no artigo "O lado escuro da Lua nunca apanha o Sol?", sintentizando-a: para fins didáticos se adota o tempo de 28 dias em que a Lua realiza uma volta na Terra e na perspectiva do planeta o lado oculto da Lua é ofuscado pela luz do Sol, portanto, gera-se a impressão de que a Lua não realiza o movimento de rotação, pois sempre se vê o mesmo lado do satélite, porém se a Lua for vista da perspectiva do Sol e não da Terra, evidencia-se o movimento de rotação lunar. Os autores ainda complementam que o período de 28 dias varia dependendo do sistema inercial escolhido, chama-se "mês sideral" quando adotado o sistema de 27,3 dias, já o "mês sinódico" dura aproximadamente 29,5 dias (CATELLI; PELLENZ; GIOVANNINI, 2014, pp. 96–102). Estudos aprofundados sobre estes fenômenos podem ser encontrados em algumas obras como: (SEEBER, 2003) e (TORGE, 1991).

Uma dúvida pertinente surge: "o que são nodos lunares e qual sua relação com a nutação?". Existem dois nodos, definidos como os pontos de encontro da órbita lunar (em volta da Terra) com a órbita terrestre (em volta do Sol) (MARTINS; SOUSA, 2022, p. 4). Os nodos possuem relação com eclipses e outros fenômenos naturais, sendo a nutação um deles. A Lua é inclinada em aproximadamente cinco graus, isto é, sua órbita também possui esta inclinação e, por conseguinte, os nodos lunares têm sua posição definida por essa inclinação (MARTINS; SOUSA, 2022, pp. 4–6); A desigualdade observada na posição dos

[3] Je désire que les réflexions répandues dans cet Essai, puissent mériter l'attention des philosophes, et la diriger vers un objet si digne de les occuper. […] Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers, comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvemens des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé, serait présent à ses yeux. L'esprit humain offre, dans la perfection qu'il a su donner à l'Astronomie, une faible esquisse de cette intelligence. Ses découvertes en Mécanique et en Géométrie, jointes à celle de la pesanteur universelle, l'ont mis à portée de comprendre dans les mêmes expressions analytiques, les états passés et futurs du système du monde.

nodos lunares indicou a anomalia da nutação aos astrônomos do século XVIII, visto que Laplace na introdução do "*Mémorie sur la théorie de la Lune*" traz os dados de observação de diferentes observatórios e como eles variam além dos cinco graus de inclinação da órbita lunar, melhor dizendo, se não houvesse o movimento de nutação, os nodos deveriam sempre estar na mesma posição e isto se provou falso pela observação empírica e posteriormente Laplace desenvolveu o equacionamento com o cálculo diferencial e integral no artigo já citado. Então, o período de nutação, observado entre dezessete e dezenove anos (definido atualmente como aproximadamente 18,6 anos), é estipulado pela precessão de igual período que altera levemente a inclinação da órbita lunar e a faz ter o movimento senoidal.

Segundo Charles Coulston Gillispie (1918–2015), historiador da Universidade de Princeton que pesquisou a fundo a carreira e os trabalhos acadêmicos de Laplace, o interesse em investigar a nutação surgiu através da insistência do astrônomo Johann Tobias Bürg (1766–1835), o qual se correspondia com Laplace no final do século XVIII e expressou profundo interesse em demonstrar matematicamente sua teoria (GILLISPIE, 1997, p.191).

Em 1800, Bürg e o principal assistente de Laplace, Alexis Bouvard (1767–1843), receberam uma gratificação oficial da Academia de Ciências Francesa, o *Institut national des Sciences et Arts*, pela pesquisa teórica e os avanços na teoria lunar — a teoria da Lua ou teoria lunar é uma área de estudo da Mecânica Celeste focada em investigar os movimentos da Lua e suas interações com outros corpos celestes; o uso do termo não é padronizado na atualidade, onde se prefere não o usar, porém está em trabalhos acadêmicos antigos como o de Laplace e outros astrônomos franceses. Sabe-se que Laplace gostava de alterar nomes de áreas da ciência, como "Mecânica Celeste" que era anteriormente chamada de "Astronomia Física", ou também quando ele criou o termo "A Teoria de Jupiter/Saturno", e sua faceta ambiciosa fica evidente na literatura:

> *"Laplace foi um oportunista na Astronomia matemática – com sucesso, o que é importante. Tornou-se o 'organizador da vitória' da Ciência que anteriormente tinha sido chamada 'Astronomia Física' e que em 1799 renomeou para 'Mecânica Celeste'."* (WILSON, 1985, p. 24, tradução nossa)[4]

Em junho de 1800, Laplace apresentou os cálculos ao instituto e demonstrou que Bürg e Bouvard estavam corretos em suas suposições. Também expôs os motivos que levam ao movimento irregular periódico detectado na órbita lunar, uma pequeníssima inclinação no eixo da Lua que gera uma nutação (GILLISPIE, 1997, pp. 191–192); (MOURÃO, 1987, p. 115). Esse movimento de nutação da Lua está relacionado com a nutação terrestre descoberta anteriormente por James Bradley (1693–1762):

[4] Laplace was an opportunist in mathematical astronomy -successfully, importantly so. He became the 'organizer of victory' for the Science that had earlier been called "physical astronomy", and which he in 1799 was to re-name "celestial mechanics".

> “(...) *o resultado de uma nutação no orbe lunar, produzido pela ação do esferoide terrestre, e correspondente ao que a lua produz em nosso equador, de modo que uma dessas nutações é a reação da outra;* (...) *essa desigualdade diminui a inclinação da órbita lunar na eclíptica, quando o nodo ascendente desta órbita coincide com o equinócio de primavera: aumenta-a, quando este nodo de vértice coincide com o equinócio de outono; que ocorreu em 1755, a inclinação muito grande que Mason determinou pelas observações de Bradley de 1750 a 1760. De fato, Bürg o determinou através de observações feitas em um intervalo mais longo, e tendo em conta a desigualdade precedente* (...)” (LAPLACE, 1802, pp.173–174, tradução nossa)[5]

As correspondências de Laplace infelizmente sucumbiram ao tempo, restando algumas preservadas em bibliotecas de universidades, museus e coleções particulares, entretanto as cartas trocadas com o sr. Bürg apenas são mencionadas nos artigos posteriores. O registro de todas as cartas enviadas e recebidas de Laplace, exceto as de coleções particulares ou as não reveladas por entidades de ensino, constam em *Correspondance de Pierre Simon Laplace (1749–1827)* (HAHN, 2013). Há menção de 57 cartas a Bouvard, porém, atualmente, apenas 12 restaram e 7 destas são datadas no período estudado (1790–1800). Bürg correspondeu 25 cartas com Laplace, porém nenhuma delas sobreviveu a ação do tempo. Nas cartas trocadas com Bouvard, o marquês costumava tratar de assuntos do Instituto Nacional e avanços nos estudos de observações astronômicas. Em nenhuma delas Laplace cita diretamente o cálculo diferencial e integral presente em *Mémorie sur la théorie de la Lune*.

A título de exemplo, a carta 311, nomeada “*[Laplace] à [Bouvard], 2 ventôse [an V] [20 février 1797]”*, é um bilhete datado de 20 de fevereiro de 1797 de Laplace a Bouvard e Jean Delambre (1749–1822) que passa despercebida a olhos poucos atentos, pois nela Laplace comenta uma conversa acalorada entre Jean de Borda (1733–1799) e Napoleão Bonaparte (1769–1821), na época general do Exército Francês, sobre a criação de uma unidade fundamental de medida (o metro) e no final do texto comenta a Jean Delambre: “Bouvard continua os seus cálculos sobre a lua; trinta observações de Maskelyne em direção ao apogeu, em 1794 e 1795, dão-lhe 37"7 para o erro médio das tabelas nestes pontos, o que confirma os meus resultados sobre este assunto.”[6] (LAISSUS, 1961, pp. 289–290, tradução nossa).

---

[5] (...) est le résultat d'une nutation dans l'orbe lunaire, produite par l'action du sphéroïde terrestre, et correspondante à celle que la lune produit dans notre équateur, de manière que l'une de ces nutations est la réaction de l'autre;(...) cette inégalité diminue l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique, lorsque le nœud ascendant de cette orbite coïncide avec l'équinoxe du printemps: elle l'augmente, lorsque ce noeud coincide avec l'équinoxe d'automne; ce qui ayant eu lieu en 1755 , a rendu trop grande, l'inclinaison que Mason a déterminée par les observations de Bradley de 1750 à 1760. En effet, Burg qui l'a déterminée par des observations faites dans un plus long intervalle, et en ayant égard à l'inégalité précédente (...)

[6] Bouvard continue ses calculs sur la lune ; trente observations de Maskelyne vers l'apogée, en 1794 et 1795, lui donnent 37"7 pour l'erreur moyenne des tables dans ces points, ce qui confirme mes résultats sur cette matièrie.

Laplace desejava ser conhecido como bom matemático, aquele que resolve problemas complexos, e ironicamente suas correspondências se perderam; de acordo com Stigler (STIGLER, 1978, p. 235), a maioria das cartas e manuscritos de Laplace que foram usados nas suas teses e posteriormente no tratado foram perdidas. Ele também afirma que é curioso como alguém ambicioso tal como Laplace deixou sua história se perder em uma gaveta qualquer.

Coulston destaca que Laplace ficou encantado em como uma pequena anomalia nos nodos lunares pôde revelar imenso aprendizado e confirmar suas teorias anteriores, em especial nos trabalhos de órbitas, movimentação e Geodésia — ao confirmar que a Terra não é um esferoide homogêneo, mas sim um geoide — de modo que o mesmo julgou inestimável para o desenvolvimento de seu tratado astronômico (GILLISPIE, 1997, p. 192). Dada a importância histórica da contribuição de Laplace ao conhecimento humano do espaço e suas relações, torna-se interessante a tradução e divulgação de seu trabalho.

Esta tradução parte do terceiro volume de *Traité de mécanique céleste*, em que foram publicados em 1802 os livros VI e VII do tratado, e também das *Oeuvres de Laplace* em sua décima segunda edição no ano de 1898, onde se encontra a transcrição original do "*Mémorie sur la théorie de la Lune*", entregue em junho de 1800 ao instituto nacional por Laplace. Deu-se preferência às *Oeuvres de Laplace*, dado que o artigo contido nelas apresenta sequencialmente o conteúdo e com notação matemática semelhante a atual — diferentemente da versão de 1802, na qual Laplace espalhou simultaneamente pelo texto outros estudos. Ignorou-se a primeira edição das *Oeuvres de Laplace* de 1843 por abranger somente os dois primeiros livros do tratado que não envolvem o objetivo da tradução.

Objetificou-se uma tradução técnica com poucas alterações lexicais para que a leitura seja próxima do material original. Parafraseando Britto, o tradutor ou opta pela solução domesticadora (adaptação do texto à cultura com alterações) ou bem adota a estrangeirizadora (tradução fiel ao idioma original e com nenhuma ou poucas mudanças) (BRITTO, 2012, pp. 22–24). A segunda opção melhor representa a corrente aqui adotada. e teve como exemplo os trabalhos de Gillispie, Stigler, Wilson, Emory e Truscott; ambos estudaram e publicaram em inglês traduções precisas e estrangeirizadoras das produções de Laplace. A escolha de diagramação para a tradução começa exibindo o texto em língua portuguesa, seguido pela transcrição do conteúdo na língua francesa. Por fim, após a tradução, anexou-se as páginas digitalizadas que trazem consigo o texto original em francês.

Bibliografia

BRITTO, Paulo Henrique. **Tradução e ilusão**. Estudos Avançados, São Paulo, n. 26, 2012, pp. 21–27.

CATELLI, Francisco; GIOVANNINI, Odilon; PELLENZ, Daiana. **O lado escuro da Lua nunca apanha o Sol?**. Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia – RELEA, n. 17, 2014, pp. 91–106.

GILLISPIE, Charles Coulston. **Pierre-Simon Laplace 1749 – 1827: A Life in Exact Science**. Chichester: Princeton University Press, 1997.

HAHN, Roger. **Correspondance de Pierre Simon Laplace (1749–1827)**. Turnhout: Brepols Publishers, 2013

LAISSUS, Yves. **Deux lettres de Laplace**. Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, v. 14, n. 3–4, 1961, pp. 285–296.

LAPLACE, Pierre-Simon. **Traité de Mécanique Céleste: Tomé Troisième**. Paris: Chez J.B.M Duprat, 1802.

______. **Essai philosophique sur les probabilités**. Paris: Imprimeurs-Libraires de l'École Polytechnique, 1814.

______. **Oeuvres de Laplace**. 1º edição. Paris: Imprimerie Royale, 1843.

______. **Oeuvres de Laplace**. 12º edição. Paris: Imprimeurs-Libraires de l'École Polytechnique, 1898.

MARTINS, Alessandro; SOUSA, Phablo de Araujo. **Medindo o Tamanho da Lua pelo Registro de um Eclipse Lunar**. Educação Pública – Divulgação Científica e Ensino de Ciências, v. 1, n. 1, 2022.

MOURÃO, Ronaldo Rogério de Freitas. **Dicionário Enciclopédico de Astronomia e Astronáutica**. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1987.

ROSA, Carlos Augusto de Proença. **História da ciência: a ciência moderna**. 2. ed. v. 2 ─ Brasília: FUNAG, 2012.

SEEBER, Günter. **Satellite geodesy**. 2. ed. Berlin; New York: de Gruyter, 2003.

STIGLER, Stephen M. **Laplace's Early Work: Chronology and Citations**. Isis, Chicago, v. 69, n. 2, 1978, pp. 234 – 254.

TORGE, Wolfgang. **Geodesy**. 2. ed. Berlin; New York: de Gruyter, 1991.

VALENTIN, Ismael Forte. **A Reforma Protestante e a educação**. Revista de Educação do Cogeime, v. 19, n. 37, pp. 59-70, 2010.

WILSON, Curtis. **The Great Inequality of Jupiter and Saturn: from Kepler to Laplace**. Archive for History of Exact Sciences, New York, v. 33, n. 1/3, 1985, pp. 15 – 290.

Herbert Wesley Azevedo
Universidade Estadual de Goiás – UEG – Campus Norte, Unidade Universitária de Porangatu – Brasil

E-mail: herbert.azevedo@ueg.br

Thiago Freitas Candido de Jesus
Pesquisador Independente

E-mail: thiago.jesus@seduc.go.gov.br

2. Tradução

DISSERTAÇÃO SOBRE A TEORIA DA LUA

Existe no orbe lunar um movimento de nutação análogo ao do equador terrestre, cujo período é o do movimento dos nodos da Lua. O esferoide terrestre, devido à atração sobre este satélite, faz com que a órbita lunar oscile como a atração da Lua sobre o esferoide terrestre faz oscilar nosso equador. A extensão dessa nutação depende do achatamento da Terra e pode, assim, lançar grande luz sobre esse importante elemento. Disso resulta, na latitude da Lua, uma desigualdade proporcional à sua longitude média, e cujo coeficiente é –6,5″, se o achatamento da Terra for $\frac{1}{334}$. Este coeficiente aumenta e chega a –13,5″, se este achatamento for $\frac{1}{230}$. Esta desigualdade pressupõe que a órbita lunar, em vez de se mover sobre a eclíptica mantendo uma inclinação constante sobre ela, se move com a mesma condição em um plano que passa pelos equinócios, entre o equador e a eclíptica, e inclinado para este último plano por 6,5″ supondo o achatamento de $\frac{1}{334}$, um fenômeno análogo ao que notei nos orbes dos satélites de Júpiter. (Veja *l'Exposition du système du monde*, Livro IV, Capítulo VI.)

A comparação de um grande número de observações indicou ao Sr. Bürg, um astrônomo alemão muito distinto, uma desigualdade periódica no movimento dos nodos da Lua, cuja posição máxima lhe parecia corresponder aproximadamente aos anos de 1778 e 1795, e cujo máximo negativo correspondeu aos anos de 1768 e 1787. O que está em conformidade com o curso da desigualdade que encontrei, mas o Sr. Bürg não determinou a lei dessa desigualdade que influencia tanto a posição dos nodos da Lua quanto a inclinação de sua órbita. A descoberta desta lei é, portanto, um novo benefício da teoria da gravidade universal, o qual neste ponto como em muitos outros, precedeu as observações. O Sr. Bürg, em sua peça que acaba de ser coroada pelo Instituto Nacional, suplicou-me para procurar a causa das anomalias notadas por observações nos nodos da Lua: a análise me levou ao que acabo de anunciar. O cidadão Bouvard acabou de comparar o resultado com as observações: 220 observações de Maskelyne,[7] nas quais a desigualdade anterior estava em seu máximo positivo, combinadas com 220 observações que estavam em seu máximo negativo, deram –7,5″ aproximados para seu coeficiente, que corresponde a $\frac{1}{314}$de achatamento para a Terra. Este coeficiente seria –13,5″ se a Terra fosse homogênea. Sua homogeneidade é, portanto, excluída pelas observações do movimento da Lua.

A consideração da desigualdade anterior me forneceu uma nova determinação da desigualdade da Lua dependendo da longitude do nodo. As observações levaram Mayer[8] a admitir esta última desigualdade, embora não tenha sido indicada por nenhuma das teorias

[7] Referência a Nevil Maskelyne (1732–1811).
[8] Referência a Tobias Mayer (1723–1762).

da Lua: ele a fixou em 4″ no seu máximo. Mason,[9] pela comparação de um grande número de observações de Bradley,[10] descobriu que era 7″. Finalmente, o Sr. Bürg, por um número muito grande de observações de Maskelyne, acabou de fixá-lo em 6,8″. A existência dessa desigualdade, portanto, parece indiscutível. Encontrei, inicialmente, pela teoria da gravidade apenas 2″ no máximo; mas tendo reconhecido desde então a nutação da órbita lunar, vi que ela influencia notavelmente essa desigualdade e descobri que seu coeficiente é igual ao da desigualdade anterior do movimento em latitude, pois a unidade é nove vezes e meia a tangente da inclinação média da órbita lunar. Isso dá 5,6″ para esse coeficiente assumindo um achatamento de $\frac{1}{334}$ para a Terra. Seria 11,5″, se esse achatamento fosse $\frac{1}{230}$; e, como todas as observações dão um coeficiente mais alto, exclui-se a homogeneidade da Terra. O coeficiente 6,8", encontrado pelo Sr. Bürg, corresponde a $\frac{1}{306}$ de achatamento, o que pouco difere do achatamento $\frac{1}{314}$ dado pela desigualdade do movimento em latitude. Vê-se que a comparação de um número muito grande de observações da Lua, tanto em longitude como em latitude, pode determinar este achatamento com tanta precisão como medições diretas e é notável que este atro, pela observação contínua dos seus movimentos, revela-nos a figura da Terra cuja redondeza deu a conhecer aos primeiros astrônomos pelos seus eclipses. Resulta também das suas pesquisas que a gravidade da Lua em direção à Terra não é exatamente movida para o centro deste planeta, e é composta pelas atrações de todas as suas partes, o que proporciona uma nova confirmação da atração recíproca das moléculas da matéria.

Eis a análise que me levou a estes resultados e que se baseia inteiramente nas fórmulas que dei no meu “*Traité de mécanique celeste*”, a que me refiro para as demonstrações destas fórmulas. Vou manter todas as denominações desta obra: suponho, como no nº 15 do Livro II, que as letras *m, r, u, s, v*, ... se referem à Lua; que as letras *m', r'*, *u', s', v'*, ... se referem ao Sol; que o plano fixo ao qual os seus movimentos estão relacionados é o da eclíptica, e que M é a Terra. Tomarei também, como unidade de massa, a soma *M* + *m* das massas da Terra e da Lua. Assim sendo, teremos, pelo nº 14 do Livro II e pelo nº 35 do Livro III,

$$Q = \frac{u}{\sqrt{1+s^2}} + m'u' + \frac{m'u'^3}{4u^2}\left[1 - 2s^2 + 3\cos(2v - 2v')\right] + \frac{u^3}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha\rho\right)D^2\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)$$

αρ expressa o achatamento da Terra; *D* expressa o raio médio; αφ expressa a relação da força centrífuga da gravidade no equador; μ é o seno da declinação da Lua. Ao nomear λ a obliquidade da eclíptica, teremos, aproximadamente,

---

[9] Referência a Charles Mason (1728–1786).
[10] Referência a James Bradley (1692–1762).

$$\mu = sen\lambda\ senv + s\ cos\lambda\ .$$

O valor de Q contém o termo

$$2\ D^2\ u^3\ s\left(\frac{1}{2}\ \alpha\varphi - \alpha\rho\right)sen\lambda\ cos\lambda\ senv\ ,$$

Por tal motivo, a expressão para $\frac{\partial Q}{\partial s}$ contém o termo

$$2\ D^2\ u^3\left(\frac{1}{2}\ \alpha\varphi - \alpha\rho\right)sen\lambda\ cos\lambda\ senv\ .$$

A terceira das equações (K) do nº 15 do Livro II dará assim, pelo seu desenvolvimento, uma equação desta forma

$$0 = \frac{d^2\ s}{d\ v^2} + (1 + 2\ i)\ s - \frac{2\ D^2\ u}{h^2}\left(\frac{1}{2}\ \alpha\varphi - \alpha\rho\right)sen\lambda\ cos\lambda\ senv + \ldots\ ,$$

$-iv$ sendo o movimento retrógrado do nodo da Lua. Ao integrá-lo, vemos que s contém o termo

$$\frac{D^2}{a^2\ i}\left(\frac{1}{2}\ \alpha\varphi - \alpha\rho\right)sen\lambda\ cos\lambda\ senv\ ,$$

$\frac{1}{u}$ e h^2 sendo aproximadamente igual à distância média a da Lua à Terra.

$\frac{D}{a}$ é a paralaxe horizontal da Lua, que supomos ser de 57'; temos

$$\alpha\varphi = \frac{1}{289}\ ;\ \lambda = 23\,°\ 28'\ ;\ i = 0{,}004022\ .$$

O que dá –6,5″*sen v* para a desigualdade anterior, assumindo $\alpha\rho = \frac{1}{334}$; seria –13,5″*sen v*, se assumirmos $\alpha\rho = \frac{1}{230}$.

Consideremos agora a desigualdade do movimento da Lua em longitude. Para tal, tomemos a fórmula (T) do nº 46 do Livro II.

Vamos observar que, nesta fórmula,

$$R = \frac{1}{r} - Q \ ,$$

que dá, considerando que $u = \frac{\sqrt{1+s^2}}{r}$,

$$R = -m^{'} u^{'} - \frac{m^{'} u^{'3} r^2}{4}\left[1 - 3 s^2 + 3 \cos\left(2 v - 2 v^{'}\right)\right] - \left(\frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha\rho\right)\frac{D^2}{r^3} 2 s \, sen\lambda \, cos\lambda \, senv - \ldots .$$

No entanto, como resultado do acima exposto,

$$s = \gamma sen\left[\left(1+i\right) v - \theta\right] + \frac{D^2}{a^2 i}\left(\frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha\rho\right) sen\lambda cos\lambda senv \ .$$

R contém a função

$$\frac{3}{4} m^{'} u^{'3} r^2 \frac{D^2 \gamma}{a^2 i}\left(\frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha\rho\right) sen\lambda \, cos\lambda \, cos\left(iv - \theta\right) - \left(\frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha\rho\right)\frac{D^2 \gamma}{r^3} sen\lambda \, cos\lambda \, cos\left(iv - \theta\right) .$$

Se denotemos por nt e $n't$ os movimentos médios da Lua e do Sol, com t expressando o tempo, temos, olhando para a órbita do Sol como circular,

$$m^{'} u^{'3} a^3 = \left(\frac{n^{'}}{n}\right)^2 .$$

Além disso, sabemos, pela teoria da Lua, que i é aproximadamente igual a $\frac{3}{4}\left(\frac{n^{'}}{n}\right)^2$; os termos de *R* precedentes se tornam

$$\frac{D^2 \gamma}{a^3}\left(\frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha\rho\right)\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{a^3}{r^3}\right) sen\lambda \, cos\lambda \, cos\left(\text{int} - \theta\right) .$$

Podemos assumir que, na fórmula (T), a característica δ se refere à quantidade $\frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha\rho$; por isso fazemos essa suposição; mas depois, para termos o valor total de δR, temos de ter o de δr, porque o termo $\frac{-m^{'} u^{'3} r^2}{4}$ da expressão de R dá em δR neste $\frac{-m^{'} u^{'3} r\delta r}{2}$, o que seria necessário considerar se δr contivesse um termo da forma $\frac{K}{i} cos\left(\text{int} - \theta\right)$; porque, sendo $m^{'} u^{'3} a^3$ igual a $\frac{4 i}{3}$, resultará num termo em δR

dependente de $cos(\text{int}-\theta)$, que será da mesma ordem que aqueles que acabamos de considerar na expressão de R. É importante determinar o valor de δR.
Para tal, retomemos a equação (S) do nº46 do Livro II. Uma vez que a característica diferencial *d* se refere apenas às coordenadas da Lua, refere-se ao ângulo *int* – *θ*; considerando somente os termos dependentes deste ângulo, teremos

$$\int \delta dR = \delta R \ ,$$

e depois a equação (S) tomará esta forma

$$0 = \frac{d^2\, r\delta r}{d\, t^2} + \frac{r\delta r}{r^3} + H\ cos(\text{int}-\theta)\ .$$

Integrando-a, vemos que a expressão δr não contém nenhum termo dependente de $cos(\text{int}-\theta)$ que tenha i como divisor; é, portanto, desnecessário considerar o termo $\frac{-m'\,u'^3\,r\delta r}{2}$ da expressão de δR. Assim sendo, se substituirmos na fórmula (T), em vez de δ*R*,

$$\frac{D^2\,\gamma}{a^3}\left(\frac{1}{2}\,\alpha\varphi-\alpha\rho\right)\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{a^3}{r^3}\right) sen\lambda\ cos\lambda\ cos(\text{int}-\theta)\ ;$$

e, se após as diferenciações para δ assumirmos *r* = *a*, temos

$$d\delta v = \frac{10\ D^2\,\gamma n\ dt}{a^2}\left(\frac{1}{2}\,\alpha\varphi-\alpha\rho\right) sen\lambda\ cos\lambda\ cos(\text{int}-\theta)\ ;$$

dv aqui é o ângulo entre os raios vetoriais consecutivos r e r + *dr*; uma vez que v expressa a longitude da Lua na eclíptica, temos, pelo nº46 do Livro II,

$$dv_1 = dv\left(1+\frac{1}{2}\,s^2-\frac{1}{2}\,\frac{d\,s^2}{d\,v^2}\right).$$

Substituindo por *s* o seu valor

$$\gamma sen\left[(1+i)\,v-\theta\right] + \frac{D^2}{a^2\,i}\left(\frac{1}{2}\,\alpha\varphi-\alpha\rho\right) sen\lambda\ cos\lambda\ senv\ ,$$

teremos, aproximadamente

$$d\delta v_1 = d\delta v - \frac{D^2 \gamma n\, dt}{2\, a^2} \left(\frac{1}{2}\, \alpha\varphi - \alpha\rho \right) sen\lambda\; cos\lambda\; sen\, (\mathrm{int} - \theta)\,,$$

Substituindo $d\delta v$ pelo seu valor e integrando, teremos em v, o termo

$$\frac{19}{2}\, \frac{D^2}{a^2\, i} \left(\alpha\rho - \frac{1}{2}\, \alpha\varphi \right) sen\lambda\; cos\lambda\; sen\, (\theta - \mathrm{int})\,,$$

onde devemos observar que o ângulo θ – *int* expressa a longitude do nodo. Façamos que *L* seja esta longitude; a desigualdade é de 5,6″*senL* se $\alpha\rho$ = $\frac{1}{334}$; é de 11,5″*senL* se $\alpha\rho$ = $\frac{1}{230}$.

3. Texto original

MÉMOIRE SUR LA THÉORIE DE LA LUNE

Il existe dans l'orbe lunaire un mouvent de nutation analogue à celui de l'équateur terrestre, et dont la période est celle du mouvement des nœuds de la Lune. Le sphéroïde terrestre, par son attraction sur ce satellite, fait osciller l'orbite lunaire comme l'attraction de la Lune sur le sphéroïde terrestre fait osciller notre équateur. L'étendue de cette nutation dépend de l'aplatissement de la Terre et peut ainsi répandre un grand jour sur cet élément important. Il en résulte, dans la latitude de la Lune, une inégalité proportionnelle à sa longitude moyenne, et dont le coefficient est – 6″,5, si l'aplatissement de la Terre est $\frac{1}{334}$. Ce coefficient augmente et s'élève à – 13″,5, si cet aplatissement est $\frac{1}{230}$. Cette inégalité revient à supposer que l'orbite lunaire, au lieu de se mouvoir sur l'écliptique en conservant sur elle une inclinaison constante, se meut avec la mème condition sur un plan passant par les équinoxes, entre l'équateur, et l'écliptique, et incliné à ce dernier plan de 6″,5 dans l'hypothèse de $\frac{1}{334}$ d'aplatissement, phénomène analogue à celui que j'ai remarqué dans les orbes des satelellites de Jupiter. (Voir l'Exposition du système du monde, Livre IV, Chapitre VI.)

Déjà la comparaison d'un grand nombre d'observations avait indiqué à M. Burg, astronome allemand très distingué, une inégalité périodique dans le mouvement des nœuds de la Lune, dont le maximum positif lui paraissait répondre à peu près aux années 1778 et 1795, et dont le maximum négatif répondait aux années 1768 et 1787, ce qui est conforme à la marche de l'inégalité que j'ai trouvée. Mais M. Burg n'a pas déterminé la loi de cette inégalité qui influe à la fois sur la position des nœuds de la Lune et sur l'inclinaison de son orbite. La découverte de cette loi est donc un nouveau bienfait de la théorie de la pesanteur universelle, qui, sur ce point comme sur beaucoup d'autres, a devancé le observations. M. Burg, dans sa pièce qui vient d'èntre couronnée par l'Institut national, m'avait engagé à rechercher la cause des anomalies qu'il avait remarquées, par les observations, dans les nœuds de la Lune: l'analyse m'a conduit à celle que je viens d'annoncer. Le citoyen Bouvard vient d'en comparer le résultat aux observations: 220 observations de Maskeline, dans lesquelles l'inégalité précédente átait à son maximum positif, combinées avec 220 observations das lesquelles elle était À son maximum négatif, lui ont donné – 7″,5 à très peu près pour son coefficient, ce qui répond à $\frac{1}{314}$ a d' aplatissement pour la Terre. Ce coefficient s'elèverait à – 13″,5 si la Terre était homogène. Son homogénéité est donc exclue par les observations mèmes du mouvement de la Lune.

La considération de l'inegalité précédente m'a fourni une nouvelle détermination de l'inégalité de la Lune, dépendante de la longitude du nœud. Les observations avaient porté Mayer à admettre cette dernière inégalité, quoiqu'elle ne fùt indiquée par aucune des théories de la Lune: il l'avait fixée à 4″ dans son maximum. Mason, par la comparaison d'un grand nombre d'observations de Bradley, l'a trouvée de 7″. Enfin M. Burg, par un très grand nombre d'observations de Maskeline, vient de la fixer à 6″,8. L'existence de cette inégalité parait donc incontestable. Je ne l'avais trouvée d'abord, par la théorie de la pesanteur, que de 2″ au plus; mais, ayant reconnu, depuis, la nutation de l'orbite lunaire, j'ai vu qu'elle influe très sensiblement sur cette inégalité, et j'ai trouvé que son coefficient est à celui de l'inégalité précédente du mouvement en latitude, comme neuf fois et demie la tangente de l'inclinaison moyenne de l' orbite lunaire est à l'unité. Cela donne 5″,6 pour ce coefficient dans l'hypothèse de $\frac{1}{334}$ d'aplatissement pour la Terre. Il s'élèverait à 11″,5, si cet aplatissement était $\frac{1}{230}$; et, comme toutes les observations donnent un coefficient plus petit, elles concourent, avec celles du mouvement de la Lune en latitude, pour exclure l'homogénéité de la Terre. Le coefficient 6″,8, trouvé par M. Burg, répond à $\frac{1}{306}$ d'aplatissement, ce qui differe peu de l'aplatissement $\frac{1}{314}$ donné par l'inégalité du mouvement en latitude. On voit donc que la comparaison d'un très grand nombre d'observations de la Lune, tant en longitude qu'en latitude, peut déterminer cet aplatissement avec autant de précision que les mesures directes; et il est mearquable que cet astre, par l'observation suivie de ses mouvements, nous découvre la figure de la Terre dont il fit connaitre la rondeur aux premiers astronomes par ses éclipses. Il résulte encore de ses recherches que la pesanteur de la Lune vers la Terre n'est point exactement dirigée vers le centre de cette planète, et se compose des attractions de toutes ses parties, ce qui fournit une confirmation nouvelle de l'attraction réciproque des molécules de la matière.

Voici présentement l'analyse qui m'a conduit à ces résultats et qui est entièrement fondée sur les formules que j'ai donnés dans mon *Traité de Mécanique céleste*, auquel je renvoie pour les démonstrations de ces formules. Je conserverai toutes les dénominations de cet Ouvrage: je supposerai, ainsi que dans le nº 15 du Livre II, que les letres m, r, u, s, v, ... se rapportent au Soleil; que le plan fixe auquel on rapporte leurs mouvements est celui de l'écliptique, et que M est la Terre. Je prendrai de plus, pour unité de masse, la somme M + m des masses de la Terre et de la Lune. Cela posé, on aura, par le nº 14 du Livre II et par le nº 35 du Livre III.

$$Q=\frac{u}{\sqrt{1+s^2}}+m'u'+\frac{m'u'^3}{4u^2}\left[1-2s^2+3\cos(2v-2v')\right]+\frac{u^3}{\left(1+s^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{2}\alpha\varphi-\alpha\rho\right)D^2\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right)$$

$\alpha\rho$ exprimant ici l'aplatissement de la Terre, dont D exprime le rayon moyen, et $\alpha\varphi$ exprimant le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'equateur; μ est le sinus de la déclinaison de la Lune. En nommant λ l'obliquité de l'écliptique, on aura, À très peu près,

$$\mu=\text{sen}\lambda\ \text{sen}v+s\ \cos\lambda$$

La valeur de Q contitent donc le terme

$$2\,D^2\,u^3\,s\left(\frac{1}{2}\,\alpha\varphi-\alpha\rho\right) sen\lambda\; cos\lambda\; senv\;,$$

et par conséquent l'expression de $\frac{\partial Q}{\partial s}$ contient le terme

$$2\,D^2\,u^3\left(\frac{1}{2}\,\alpha\varphi-\alpha\rho\right) sen\lambda\; cos\lambda\; senv\;.$$

La troisième des équations (K) du nº 15 du Livre II donnera ainsi, par son développement, une équation de cette forme

$$0=\frac{d^2\,s}{d\,v^2}+(1+2\,i)\,s-\frac{2\,D^2\,u}{h^2}\left(\frac{1}{2}\,\alpha\varphi-\alpha\rho\right) sen\lambda\; cos\lambda\; senv+...,$$

– iv étant le mouvement rétrograde du nœud de la Lune. En l'intégrant, on voit que *s* contient le terme

$$\frac{D^2}{a^2\,i}\left(\frac{1}{2}\,\alpha\varphi-\alpha\rho\right) sen\lambda\; cos\lambda\; senv\;,$$

$\frac{1}{u}$ et h^2 étant à fort peu près égaux à la moyenne distance a de la Lune à la Terre.

$\frac{D}{a}$ est la parallaxe horizontale de la Lune, que nous supposerons de 57'; on a

$$\alpha\varphi=\frac{1}{289}\;;\;\lambda=23\,°\;28'\;;\;i=0{,}004022$$

ce qui donne – 6″,5sinv pour l'inégalité précédent, en supposant $\alpha\rho$ = $\frac{1}{334}$; elle serait 13,5″*senv*, si l'on supposait $\alpha\rho$ = $\frac{1}{230}$.

Considérons présentement l'inégalité du mouvement de la Lune en longitude. Pour cela, reprenons la formule (T) du nº 46 du Livre II.

Nous observerons que, dans cette formule,

$$R=\frac{1}{r}-Q\;,$$

ce qui donne, en considérant que $u=\frac{\sqrt{1+s^2}}{r}$,

$$R=-m^{'}u^{'}-\frac{m^{'}u^{'3}r^2}{4}\left[1-3s^2+3\cos(2v-2v^{'})\right]-\left(\frac{1}{2}\alpha\varphi-\alpha\rho\right)\frac{D^2}{r^3}2s\,sen\lambda\cos\lambda\,sen v-\ldots.$$

Or on a, par ce qui précède,

$$s=\gamma sen\left[(1+i)v-\theta\right]+\frac{D^2}{a^2 i}\left(\frac{1}{2}\alpha\varphi-\alpha\rho\right)sen\lambda\cos\lambda sen v\,.$$

R contient donc la fonction

$$\frac{3}{4}m^{'}u^{'3}r^2\frac{D^2\gamma}{a^2 i}\left(\frac{1}{2}\alpha\varphi-\alpha\rho\right)sen\lambda\cos\lambda\cos(iv-\theta)-\left(\frac{1}{2}\alpha\varphi-\alpha\rho\right)\frac{D^2\gamma}{r^3}sen\lambda\cos\lambda\cos(iv-\theta)\,.$$

Si l'on désigne par nt et $n't$ les moyens mouvements de la Lune et du Soleil, t exprimant le temps, o a, regardant l'orbite du Soleil comme circulaire,

$$m^{'}u^{'3}a^3=\left(\frac{n^{'}}{n}\right)^2.$$

On sait, de plus, par la théorie de la Lune, que i est à fot peu près égal à $\frac{3}{4}\left(\frac{n^{'}}{n}\right)^2$; les termes précédents de R deviennent ainsi

$$\frac{D^2\gamma}{a^3}\left(\frac{1}{2}\alpha\varphi-\alpha\rho\right)\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{a^3}{r^3}\right)sen\lambda\cos\lambda\cos(\text{int}-\theta)\,.$$

Maintenant on peut supposer que, dans la formule (T), la caractéristique δ se rapporte à la quantité $\frac{1}{2}\alpha\varphi-\alpha\rho$; nous ferons donc cette supposition; mais alors, pour avoir la valeur complète de δR, il faut avoir celle de δr, car le terme $\frac{-m^{'}u^{'3}r^2}{4}$ de l'expression de R donne dans δR celui-ci $\frac{-m^{'}u^{'3}r\delta r}{2}$, auquel il serait nécessaire d'avoir égard si δr contenait un terme de la forme $\frac{K}{i}\cos(\text{int}-\theta)$; car, $m^{'}u^{'3}a^3$ étant é gal à $\frac{4i}{3}$, il en résulterait dans δR un terme dépendant de $\cos(\text{int}-\theta)$ qui serait du même ordre que ceux auxquels nous venons d'avoir égard dans l'expression de R. Il importe donc de déterminer la valeur de δR.

Pour cela, reprenons l'équation (S) du nº46 du Livre II. La caractéristique différentielle d se rapportant aux seules coordonnées de la Lune, elle se rapporte à l'angle $\text{int} - \theta$; en ne considérant donc que les termes dépendants de cet angle, on aura

$$\int \delta dR = \delta R \ ,$$

et alors l'équation (S) prendra cette forme

$$0 = \frac{d^2 r\delta r}{d\, t^2} + \frac{r\delta r}{r^3} + H\, cos\,(\text{int} - \theta)\,.$$

En l'intégrant, on voit que l'expression de δr ne contient point de termes dépendants de $cos\,(\text{int} - \theta)$ qui aient i pour diviseur; il est donc inutile d'avoir égard au terme $\frac{-\, m^{'}\, u^{'3}\, r\delta r}{2}$ de l'expression de δR.

Cela posé, si l'on substitue dams la formule (T), au lieu de δR,

$$\frac{D^2\, \gamma}{a^3}\left(\frac{1}{2}\,\alpha\varphi - \alpha\rho\right)\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{a^3}{r^3}\right) sen\lambda\; cos\lambda\; cos\,(\text{int} - \theta)\,;$$

et , si après les différentiations relatives à δ on suppose $r = a$, on aura

$$d\delta v = \frac{10\ D^2\, \gamma n\; dt}{a^2}\left(\frac{1}{2}\,\alpha\varphi - \alpha\rho\right) sen\lambda\; cos\lambda\; cos\,(\text{int} - \theta)\,;$$

dv est ici l'angle compris entre les rayons vecteurs consécutifs r et r+dr; or, v exprimant la longitude de la Lune sur l'écliptique, on a, par le n°46 du Livre II.

$$dv_1 = dv\left(1 + \frac{1}{2}\, s^2 - \frac{1}{2}\,\frac{d\, s^2}{d\, v^2}\right).$$

En substituant donc pour s sa valeur

$$\gamma sen\,[(1+i)\, v - \theta] + \frac{D^2}{a^2\, i}\left(\frac{1}{2}\,\alpha\varphi - \alpha\rho\right) sen\lambda\; cos\lambda\; senv\ ,$$

on aura, à très peu près,

$$d\delta v_1 = d\delta v - \frac{D^2\, \gamma n\; dt}{2\, a^2}\left(\frac{1}{2}\,\alpha\varphi - \alpha\rho\right) sen\lambda\; cos\lambda\; sen\,(\text{int} - \theta)\,,$$

Substituant pour $d\delta v$ sa valeur et intégrant, on aura dans v, le terme

$$\frac{19}{2}\frac{D^2}{a^2 i}\left(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi\right) sen\lambda\ cos\lambda\ sen\left(\theta - \mathrm{int}\right),$$

ou l'on doit observer que l'angle θ – *int* exprime la longitude du nœud.

Soit done L cette longitude; cette inégalité est 5,6″*senL* si $\alpha\rho = \frac{1}{334}$; elle s'élève à 11,5″*senL* si $\alpha\rho = \frac{1}{230}$.

4. Texto Original Digitalizado das *Oeuvres de Laplace (1898*)

MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE DE LA LUNE.

MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE DE LA LUNE[1].

Mémoires de l'Académie des Sciences, I^re Série, T. III; prairial an IX [2].

Il existe dans l'orbe lunaire un mouvement de nutation analogue à celui de l'équateur terrestre, et dont la période est celle du mouvement des nœuds de la Lune. Le sphéroïde terrestre, par son attraction sur ce satellite, fait osciller l'orbite lunaire comme l'attraction de la Lune sur le sphéroïde terrestre fait osciller notre équateur. L'étendue de cette nutation dépend de l'aplatissement de la Terre et peut ainsi répandre un grand jour sur cet élément important. Il en résulte, dans la latitude de la Lune, une inégalité proportionnelle à sa longitude moyenne, et dont le coefficient est $-6'',5$, si l'aplatissement de la Terre est $\frac{1}{334}$. Ce coefficient augmente et s'élève à $-13'',5$, si cet aplatissement est $\frac{1}{330}$. Cette inégalité revient à supposer que l'orbite lunaire, au lieu de se mouvoir sur l'écliptique en conservant sur elle une inclinaison constante, se meut avec la même condition sur un plan passant par les équinoxes, entre l'équateur et l'écliptique, et incliné à ce dernier plan de $6'',5$ dans l'hypothèse de $\frac{1}{334}$ d'aplatissement, phénomène analogue à celui que j'ai remarqué dans les orbes des satellites de Jupiter. (*Voir* l'*Exposition du système du monde*, Livre IV, Chapitre VI.)

Déjà la comparaison d'un grand nombre d'observations avait indiqué à M. Burg, astronome allemand très distingué, une inégalité périodique

(1) Lu le 26 prairial an VIII.

(2) *Mémoires de l'Institut national des Sciences et Arts*, t. III.

dans le mouvement des nœuds de la Lune, dont le maximum positif lui paraissait répondre à peu près aux années 1778 et 1795, et dont le maximum négatif répondait aux années 1768 et 1787, ce qui est conforme à la marche de l'inégalité que j'ai trouvée. Mais M. Burg n'a pas déterminé la loi de cette inégalité qui influe à la fois sur la position des nœuds de la Lune et sur l'inclinaison de son orbite. La découverte de cette loi est donc un nouveau bienfait de la théorie de la pesanteur universelle, qui, sur ce point comme sur beaucoup d'autres, a devancé les observations. M. Burg, dans sa pièce qui vient d'être couronnée par l'Institut national, m'avait engagé à rechercher la cause des anomalies qu'il avait remarquées, par les observations, dans les nœuds de la Lune : l'analyse m'a conduit à celle que je viens d'annoncer. Le citoyen Bouvard vient d'en comparer le résultat aux observations : 220 observations de Maskeline, dans lesquelles l'inégalité précédente était à son maximum positif, combinées avec 220 observations dans lesquelles elle était à son maximum négatif, lui ont donné $-7'',5$ à très peu près pour son coefficient, ce qui répond à $\frac{1}{314}$ d'aplatissement pour la Terre. Ce coefficient s'élèverait à $-13'',5$ si la Terre était homogène. Son homogénéité est donc exclue par les observations mêmes du mouvement de la Lune.

La considération de l'inégalité précédente m'a fourni une nouvelle détermination de l'inégalité de la Lune, dépendante de la longitude du nœud. Les observations avaient porté Mayer à admettre cette dernière inégalité, quoiqu'elle ne fût indiquée par aucune des théories de la Lune : il l'avait fixée à $4''$ dans son maximum. Mason, par la comparaison d'un grand nombre d'observations de Bradley, l'a trouvée de $7''$. Enfin M. Burg, par un très grand nombre d'observations de Maskeline, vient de la fixer à $6'',8$. L'existence de cette inégalité parait donc incontestable. Je ne l'avais trouvée d'abord, par la théorie de la pesanteur, que de $2''$ au plus; mais, ayant reconnu, depuis, la nutation de l'orbite lunaire, j'ai vu qu'elle influe très sensiblement sur cette inégalité, et j'ai trouvé que son coefficient est à celui de l'inégalité précédente du mouvement en latitude, comme neuf fois et demie la tangente de l'inclinaison moyenne de l'orbite lunaire est à l'unité. Cela donne 5″,6 pour ce coefficient dans l'hypothèse de $\frac{1}{334}$ d'aplatissement pour la Terre. Il s'élèverait à 11″,5, si cet aplatissement était $\frac{1}{230}$; et, comme toutes les observations donnent un coefficient plus petit, elles concourent, avec celles du mouvement de la Lune en latitude, pour exclure l'homogénéité de la Terre. Le coefficient 6″, 8, trouvé par M. Burg, répond à $\frac{1}{305}$ d'aplatissement, ce qui diffère peu de l'aplatissement $\frac{1}{314}$ donné par l'inégalité du mouvement en latitude. On voit donc que la comparaison d'un très grand nombre d'observations de la Lune, tant en longitude qu'en latitude, peut déterminer cet aplatissement avec autant de précision que les mesures directes; et il est remarquable que cet astre, par l'observation suivie de ses mouvements, nous découvre la figure de la Terre dont il fit connaître la rondeur aux premiers astronomes par ses éclipses. Il résulte encore de ses recherches que la pesanteur de la Lune vers la Terre n'est point exactement dirigée vers le centre de cette planète, et se compose des attractions de toutes ses parties, ce qui fournit une confirmation nouvelle de l'attraction réciproque des molécules de la matière.

Voici présentement l'analyse qui m'a conduit à ces résultats et qui est entièrement fondée sur les formules que j'ai données dans mon *Traité de Mécanique céleste*, auquel je renvoie pour les démonstrations de ces formules. Je conserverai toutes les dénominations de cet Ouvrage : je supposerai, ainsi que dans le n° 15 du Livre II, que les lettres m, r, u, s, v, ... se rapportent à la Lune; que les lettres m', r', u', s', v', ... se rapportent au Soleil; que le plan fixe auquel on rapporte leurs mouvements est celui de l'écliptique, et que M est la Terre. Je prendrai de plus, pour unité de masse, la somme $\mathrm{M}+m$ des masses de la Terre et de la Lune. Cela posé, on aura, par le n° 14 du Livre II et par le n° 35 du Livre III,

$$\begin{aligned} \mathrm{Q} = \frac{u}{\sqrt{1+s^2}} + m'u' + \frac{m'u'^3}{4u^2}\left[1 - 2s^2 + 3\cos(2v - 2v')\right] \\ + \frac{u^3}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\tfrac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha p\right)\mathrm{D}^2\left(\mu^2 - \tfrac{1}{3}\right), \end{aligned}$$

260 MÉMOIRE SUR LA THÉORIE DE LA LUNE.

αp exprimant ici l'aplatissement de la Terre, dont D exprime le rayon moyen, et $\alpha\varphi$ exprimant le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur; μ est le sinus de la déclinaison de la Lune. En nommant λ l'obliquité de l'écliptique, on aura, à très peu près,

$$\mu = \sin\lambda \sin v + s \cos\lambda.$$

La valeur de Q contient donc le terme

$$2D^2 u^3 s (\tfrac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha p) \sin\lambda \cos\lambda \sin v,$$

et par conséquent l'expression de $\frac{\partial Q}{\partial s}$ contient le terme

$$2D^2 u^3 (\tfrac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha p) \sin\lambda \cos\lambda \sin v.$$

La troisième des équations (K) du n° 15 du Livre II donnera ainsi, par son développement, une équation de cette forme

$$0 = \frac{d^2 s}{dv^2} + (1 + 2i)s - \frac{2D^2 u}{h^2} (\tfrac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha p) \sin\lambda \cos\lambda \sin v + \ldots,$$

$-iv$ étant le mouvement rétrograde du nœud de la Lune. En l'intégrant, on voit que s contient le terme

$$\frac{D^2}{a^2 i} (\tfrac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha p) \sin\lambda \cos\lambda \sin v,$$

$\frac{1}{u}$ et h^2 étant à fort peu près égaux à la moyenne distance a de la Lune à la Terre.

$\frac{D}{a}$ est la parallaxe horizontale de la Lune, que nous supposerons de $57'$; on a

$$\alpha\varphi = \tfrac{1}{289}, \qquad \lambda = 23^\circ 28' \qquad \text{et} \qquad i = 0{,}004022,$$

ce qui donne $-6'',5 \sin v$ pour l'inégalité précédente, en supposant $\alpha p = \frac{1}{321}$; elle serait $-13'',5 \sin v$, si l'on supposait $\alpha p = \frac{1}{230}$.

Considérons présentement l'inégalité du mouvement de la Lune en longitude. Pour cela, reprenons la formule (T) du n° 46 du Livre II.

Nous observerons que, dans cette formule,

$$R = \frac{1}{r} - Q,$$

ce qui donne, en considérant que $u = \frac{\sqrt{1+s^2}}{r}$,

$$R = -m'u' - \frac{m'u'^3r^2}{4}[1 - 3s^2 + 3\cos(2v - 2v')]$$
$$- (\tfrac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha p)\frac{D^2}{r^3}2s\sin\lambda\cos\lambda\sin v - \ldots.$$

Or on a, par ce qui précède,

$$s = \gamma\sin[(1+i)v - \theta] + \frac{D^2}{a^3 i}(\tfrac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha p)\sin\lambda\cos\lambda\sin v.$$

R contient donc la fonction

$$\tfrac{3}{4}m'u'^3r^2\frac{D^2\gamma}{a^3 i}(\tfrac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha p)\sin\lambda\cos\lambda\cos(iv - \theta)$$
$$- (\tfrac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha p)\frac{D^2\gamma}{r^3}\sin\lambda\cos\lambda\cos(iv - \theta).$$

Si l'on désigne par nt et $n't$ les moyens mouvements de la Lune et du Soleil, t exprimant le temps, on a, en regardant l'orbite du Soleil comme circulaire,

$$m'u'^3a^3 = \left(\frac{n'}{n}\right)^2.$$

On sait, de plus, par la théorie de la Lune, que i est à fort peu près égal à $\frac{3}{4}\left(\frac{n'}{n}\right)^2$; les termes précédents de R deviennent ainsi

$$\frac{D^2\gamma}{a^3}(\tfrac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha p)\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{a^3}{r^3}\right)\sin\lambda\cos\lambda\cos(int - \theta).$$

Maintenant on peut supposer que, dans la formule (T), la caractéristique δ se rapporte à la quantité $\frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha p$; nous ferons donc cette supposition; mais alors, pour avoir la valeur complète de δR, il faut avoir celle de δr, car le terme $-\frac{m'u'^3r^2}{4}$ de l'expression de R donne dans δR celui-ci $-\frac{m'u'^3 r\,\delta r}{2}$, auquel il serait nécessaire d'avoir égard si δr contenait un terme de la forme $\frac{K}{i}\cos(int-\theta)$; car, $m'u'^3 a^3$ étant égal à $\frac{4}{3}i$, il en résulterait dans δR un terme dépendant de $\cos(int-\theta)$, qui serait du même ordre que ceux auxquels nous venons d'avoir égard dans l'expression de R. Il importe donc de déterminer la valeur de δR.

Pour cela, reprenons l'équation (S) du n° 46 du Livre II. La caractéristique différentielle d se rapportant aux seules coordonnées de la Lune, elle se rapporte à l'angle $int-\theta$; en ne considérant donc que les termes dépendants de cet angle, on aura

$$\int \delta\, d\mathrm{R} = \delta\mathrm{R},$$

et alors l'équation (S) prendra cette forme

$$0 = \frac{d^2 r\,\delta r}{dt^2} + \frac{r\,\delta r}{r^3} + \mathrm{H}\cos(int-\theta).$$

En l'intégrant, on voit que l'expression de δr ne contient point de termes dépendants de $\cos(int-\theta)$ qui aient i pour diviseur; il est donc inutile d'avoir égard au terme $-\frac{m'u'^3 r\,\delta r}{2}$ de l'expression de δR. Cela posé, si l'on substitue dans la formule (T), au lieu de δR,

$$\frac{\mathrm{D}^2\gamma}{a^3}\left(\tfrac{1}{2}\alpha\varphi-\alpha p\right)\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{a^3}{r^3}\right)\sin\lambda\cos\lambda\cos(int-\theta);$$

et, si après les différentiations relatives à δ on suppose $r=a$, on aura

$$d\,\delta v = \frac{10\,\mathrm{D}^2\gamma\, n\, dt}{a^2}\left(\tfrac{1}{2}\alpha\varphi-\alpha p\right)\sin\lambda\cos\lambda\cos(int-\theta);$$

dv est ici l'angle compris entre les rayons vecteurs consécutifs r et $r+dr$; or, v exprimant la longitude de la Lune sur l'écliptique, on a, par le n° 46 du Livre II,

$$dv_1 = dv\left(1+\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}\frac{ds^2}{dv^2}\right).$$

En substituant donc pour s sa valeur

$$\gamma \sin[(1+i)v-\theta]+\frac{D^2}{a^2 i}(\tfrac{1}{2}\alpha\varphi-\alpha p)\sin\lambda\cos\lambda\sin v,$$

on aura, à très peu près,

$$d\,\delta v_1 = d\,\delta v-\frac{D^2\gamma n\,dt}{2a^2}(\tfrac{1}{2}\alpha\varphi-\alpha p)\sin\lambda\cos\lambda\cos(int-\theta).$$

Substituant pour $d\,\delta v$ sa valeur et intégrant, on aura dans v, le terme

$$\frac{19}{2}\,\frac{D^2}{a^2 i}(\alpha p-\tfrac{1}{2}\alpha\varphi)\sin\lambda\cos\lambda\sin(\theta-int),$$

où l'on doit observer que l'angle $\theta - int$ exprime la longitude du nœud.

Soit donc L cette longitude; cette inégalité est $5'',6\sin L$ si $\alpha p=\frac{1}{334}$; elle s'élève à $11'',5\sin L$ si $\alpha p=\frac{1}{230}$.