Traduções
Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática – Vol. 23, nº 46 – pp. 1–22
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

O PROBLEMA BOVINO DE ARQUIMEDES: TRADUÇÃO COM NOTAS, INTRODUÇÃO E COMENTÁRIOS SOBRE A RESOLUÇÃO

Henrique Marins de Carvalho
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP – Brasil

Rodrigo Lima de Oliveira
Universidade de São Paulo – USP – Brasil

(aceito para publicação em janeiro de 2023)

Resumo

O artigo apresenta uma tradução do poema matemático atribuído a Arquimedes, o *Problema Bovino*. A tradução foi feita a partir da edição de Charles Mugler, de 1971. Acompanha a tradução uma introdução ao problema e comentários sobre a sua resolução, apresentadas com simbologia e recursos da matemática contemporânea, com explicações sobre os objetos e procedimentos de cálculo necessários.

Palavras-chave: Arquimedes, Poesia grega, *Problema Bovino*, Matemática grega, Tradução.

[ARCHIMEDES' CATTLE PROBLEM: TRANSLATION WITH NOTES, INTRODUCTION AND RESOLUTION]

Abstract

The paper presents a translation of the mathematical poem attributed to Archimedes, the *Cattle Problem*. The translation was based on Charles Mugler's edition, from 1971. The translation is followed by an introduction to the problem and comments regarding its resolution, presented with symbology and resources of the contemporary mathematics, with explanations concerning the objects and calculation procedures needed.

Keywords: Archimedes, Greek poetry, *Cattle Problem*, Greek mathematics, Translation.

1. Introdução

Problema Bovino é o nome pelo qual é conhecido o poema composto por 22 dísticos elegíacos[1], descoberto pelo polímata alemão Gotthold Ephraim Lessing (1729–1781) no ano de 1773 em um manuscrito localizado na Biblioteca Herzog August. Segundo West (1974, p. 2) "por elegia denota-se uma tradição poética, em metro elegíaco, na qual o poeta discursa por meio de sua própria pessoa, geralmente para um interlocutor específico e no contexto de uma ocasião ou situação particular". Esta definição retrata bem o que é exposto no trecho em prosa que no manuscrito serve de título ao poema,[2] segundo o qual Arquimedes (287 a.C.–212 a.C.) teria composto o poema e então o enviado para Alexandria em uma carta endereçada a Eratóstenes de Cirene (276 a.C.–194 a.C.),[3] e aos demais interessados pelos assuntos tratados no mesmo que estivessem localizados naquela cidade.[4]

O poema trabalha com a matéria poética homérica, propondo uma releitura dos versos 127–130 do canto XII da Odisseia, passagem esta que trata da quantidade de vacas e ovelhas do Sol:

> "Θρινακίην δ᾽ ἐς νῆσον ἀφίξεαι· ἔνθα δὲ
> πολλαὶ
> βόσκοντ᾽ Ἠελίοιο βόες καὶ ἴφια μῆλα,
> ἑπτὰ βοῶν ἀγέλαι, τόσα δ᾽ οἰῶν πώεα καλά,
> πεντήκοντα δ᾽ ἕκαστα."
>
> "Depois chegarás à ilha Trinácria, onde pastam
> as muitas vacas e as robustas ovelhas do Sol:
> São sete rebanhos de vacas, e igualmente, sete de belas ovelhas,
> Com cinquenta animais em cada uma."

No entanto, diferentemente do que ocorre no poema homérico, a matemática que envolve a contagem do gado do Sol no *Problema Bovino* de Arquimedes é mais complexa, e a sua menor resposta possível é expressa por um número de 206545 dígitos.

2. A matemática do *Problema Bovino*

Nos versos iniciais do *Problema Bovino*, o seu remetente ordena a um estrangeiro (ξεῖνε) que este calcule a quantidade do gado do Sol, que é dividido em quatro rebanhos, segundo a sua coloração: branco, preto, amarelo e malhado. As suas proporções são dadas por meio de nove condições, sendo as três primeiras referentes aos touros:

---

[1] Dístico elegíaco era a forma poética utilizada pelos gregos para a composição de epigramas e elegias. Cada dístico elegíaco é composto por um verso hexâmetro dactílico seguido por um verso pentâmetro dactílico.

[2] Segundo Benson (2014), esta parte foi posteriormente incorporada ao poema.

[3] Polímata grego, célebre pelo seu cálculo da circunferência da Terra, também tendo sido diretor da biblioteca de Alexandria.

[4] O texto não especifica quais assuntos seriam estes, o que dados a forma e conteúdo do problema, tanto poderiam ser assuntos relacionados ao seu conteúdo matemático quanto ao seu conteúdo poético.

> *"Em cada rebanho havia uma quantidade de touros sobressaindo-se em número, formando tal proporção: ó estrangeiro, imagine; os de pelo branco eram iguais a metade mais um terço dos pretos, mais todos os amarelos juntos. Já os pretos eram iguais a um quarto mais um quinto dos malhados, mais todos os amarelos juntos. Observe que os touros restantes, os malhados, eram iguais a um sexto mais um sétimo dos brancos, mais todos os amarelos juntos."*

Ou seja:

Touros brancos = $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$ dos touros pretos + todos os touros amarelos

Touros pretos = $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$ dos touros malhados + todos os touros amarelos

Touros malhados = $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)$ dos touros brancos + todos os touros amarelos

As quatro condições seguintes fornecem as proporções das vacas:

> *"Esta era a proporção das vacas: as brancas eram iguais a um terço mais um quarto de todo o rebanho preto. Já as vacas pretas eram iguais a um quarto mais um quinto das vacas malhadas, quando iam para o pasto com os touros da mesma cor. Já as malhadas eram em número igual a um quinto mais um sexto do rebanho amarelo. As amarelas eram em número igual a metade de um terço mais um sétimo do rebanho branco."*

Ou seja:

Vacas brancas = $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$ do rebanho preto

Vacas pretas = $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$ do rebanho malhado

Vacas malhadas = $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$ do rebanho amarelo

Vacas amarelas = $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)$ do rebanho branco

As duas condições finais exigem que o número de touros brancos mais o número de touros pretos forme uma figura de igual profundidade e largura, ou seja, este número deve ser um número quadrado, e que o número dos touros amarelos mais o número dos malhados deve formar um número que possa ser disposto na forma de um triângulo equilátero, ou seja, este número deve ser um número triangular:

> *"Mas venha e entenda também todas essas condições que afetam o número do gado do Sol. Quando os touros brancos misturavam seu número com os pretos, se mantinham todos em formação de igual profundidade e largura, e as planícies da Trinácria enchiam-se com a sua multidão. Além disso, quando os touros amarelos e malhados eram reunidos, permaneciam de um modo que seu número, começando pelo um, crescia lentamente até completar uma figura triangular, não havendo touros de outras cores, nem sobrando nenhum deles."*

Ou seja:

Touros brancos + Touros pretos = número quadrado
Touros amarelos + Touros malhados = número triangular

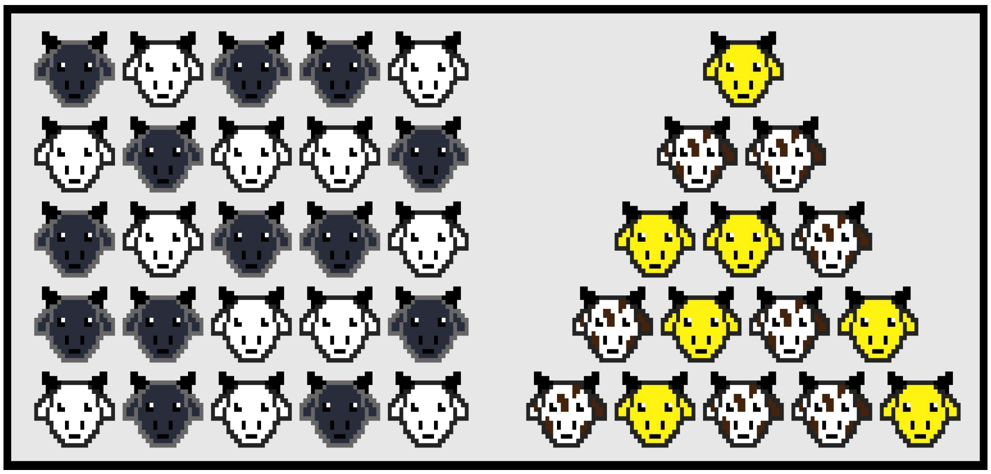

Figura 1: Touros pretos e brancos ordenados de modo a formar um número quadrado e touros amarelos e brancos ordenados de modo a formar um número triangular (autoria própria)

A expressão *número quadrado* ou, ainda, *quadrado perfeito* é mais usual na matemática, principalmente no âmbito escolar, e dispensa explicações. *Número triangular*, por outro lado, é uma terminologia menos frequente, mas que tem o mesmo apelo geométrico para estabelecer subconjuntos e sequências de números inteiros que respeitam a exigência de dispor dada quantidade de pontos (ou pequenas pedras, ou mesmo touros) em uma configuração que seja um triângulo equilátero. Como mencionado posteriormente, os números que atendem essa restrição são encontrados no subconjunto que reúne as somas dos *n* primeiros números naturais.

3. Os gêneros textuais presentes no *Problema Bovino*

Pode parecer estranho ao público contemporâneo que um matemático se valha de uma forma poética para tratar de questões matemáticas; no entanto, o poema era um dentre os vários gêneros textuais utilizados pelos gregos em seus textos matemáticos, que também incluíam a aula, a carta, o escólio, a introdução, questões de pergunta e resposta, a proposição, o tratado, etc.[5]

O texto do manuscrito do *Problema Bovino* dá conta de ao menos mais dois gêneros textuais além do poema; a carta e o escólio.[6] O trecho em prosa que no manuscrito serve de título ao poema nos informa de que ele fora enviado em forma de uma carta, no entanto, não nos informa sobre o conteúdo dela para além do poema: se acompanhava uma introdução ao poema, se o *Problema Bovino* poderia ser o ponto de partida para o desenvolvimento do argumento de algum estudo matemático que Arquimedes estivesse compartilhando com Eratóstenes, ou mesmo, se o poema era apenas uma atividade lúdica entre dois matemáticos, sem que fosse visado um objetivo específico para além da recreação.

O escólio do poema fornece números cuja proporção satisfaz as sete primeiras condições de resolução do problema, sem, no entanto, satisfazer as duas últimas condições, que exigem que a soma dos touros brancos mais os touros pretos seja um número quadrado e que a soma dos touros amarelos mais os touros malhados, seja um número triangular.

É notável que, dentre os textos matemáticos gregos sobreviventes que se utilizam da forma poética, o *Problema Bovino* seja aquele cuja resolução é a mais complexa. A título de curiosidade, é possível comparar o texto de Arquimedes com os problemas presentes na *Antologia Grega;*[7] uma compilação de textos gregos vários, em sua maioria epigramas, cujo livro XIV tem por tema problemas matemáticos, charadas, e oráculos, cujo um dos problemas se encontra traduzido abaixo:

Εἰς τὴν Αὐγείου κόπρον

Αὐγείην ἐρέεινε μέγα σθένος Ἀλκείδαο,
πληθὺν βουκολίων διζήμενος· ὃς δ’ ἀπάμειπτο·
“Ἀμφὶ μὲν Ἀλφειοῖο ῥοάς, φίλος, ἥμισυ τῶνδε·
μοίρη δ’ ὀγδοάτη ὄχθον Κρόνου ἀμφινέμονται·
δωδεκάτη δ’ ἀπάνευθε Ταρακξίπποιο παρ’ ἱρόν·
ἀμφὶ δ’ ἀρ’ Ἦλιδα δῖαν ἐεικοστὴ νεμέθονται·
αὐτὰρ ἐν Ἀρκαδίῃ <γε> τριηκοστὴν προλέλοιπα·
λοιπὰς δ’ αὖ λεύσσεις ἀγέλας τόδε πεντήκοντα.”

[5] Para uma abordagem sobre a diversidade de gêneros textuais utilizados em textos matemáticos gregos, ver Taub (2013).

[6] Escólio, do grego antigo σχόλιον, são comentários adicionados na margem ou fim de manuscritos de autores antigos, a fim de tornar inteligíveis as suas obras.

[7] Também conhecida como *Antologia Palatina*.

No estábulo de Augeas

> Hércules, o poderoso, questionava Augeas procurando saber o número [de animais] de seus rebanhos, ao que ele respondeu:
>
> "Sobre o rio Alfeu, meu amigo, estão a metade deles;
> A oitava parte pasta ao redor do monte de Cronos;
> A décima segunda parte está distante, no recinto de Taraxippus;
> A vigésima parte se alimenta na divina Élis,
> E a trigésima parte eu deixei na Arcádia;
> Mas aqui você vê os cinquenta animais restantes."

Assim como o problema acima e o *Problema Bovino*, parte dos problemas matemáticos do livro XIV da *Antologia Grega* possuem um fundo mitológico; no entanto, não são extensos e possuem uma simples resolução, diferentemente do *Problema Bovino*. A sua grande extensão, sua elevada qualidade poética[8] e o seu elevado grau de dificuldade de resolução tornam o poema de Arquimedes uma obra única dentre os textos gregos poéticos que tratavam de matemática.

4. Histórico de resolução do *Problema Bovino*

4.1 A resolução do *Problema Bovino* nos séculos XIX e XX

De forma resumida, listamos algumas das publicações em que foram apresentadas soluções com respostas parciais ou completas do *Problema Bovino*.

Amthor (1880) foi o primeiro a resolver o *Problema Bovino* após a sua descoberta, no entanto, apenas fornece a informação de que a menor solução que satisfaça as nove condições referentes ao gado do Sol é um número de 206545 dígitos, começando com os dígitos 776. Bell (1895) fornece os 30 primeiros dígitos e os 12 últimos dígitos dos rebanhos das vacas pretas, malhadas e amarelas, e os 31 primeiros dígitos e os últimos 12 dígitos dos rebanhos restantes e da solução geral do problema, alcançados após um trabalho de 4 anos de computação.

Em 1965, com o advento dos computadores eletrônicos, Williams, German e Zarnke (1965), utilizando um computador IBM 7040 com 32k de memória e um IBM 1620, conseguem alcançar a menor solução possível – até então – do *Problema Bovino.* O cálculo levou 7 horas e 49 minutos para ser completado e, quando impressa, a resposta ocupou 42 folhas de papel. Em 1985, Nelson (1985, apud VARDI 1998) foi o primeiro a fornecer o número completo ao grande público e Vardi, em 1998, apresentou fórmulas para gerar soluções para o *Problema Bovino*.

[8] Para uma análise do conteúdo poético do *Problema Bovino*, ver Benson (2014).

4.2 A resolução do *Problema Bovino* na antiguidade

Segundo Dijksterhuis (1956) e Netz (2009), certamente ninguém na antiguidade teria conseguido resolver o *Problema Bovino* (se considerarmos as restrições da segunda parte). Os autores não explicitam as razões para as suas afirmações; no entanto, considerando as resoluções modernas do problema, é possível afirmar o quão difícil seria para os gregos alcançar a resolução do problema dado o seu limitado sistema de notação numérica.[9]

Segundo Schreiber (1993) as resoluções modernas estão em desacordo com o que diz o texto grego nos versos 7-8 do poema: "Ἐν δὲ ἑκάστῳ στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι", literalmente "Em cada rebanho havia uma quantidade de touros sobressaindo-se em número".[10] Com isso, uma nova condição em relação ao número do gado do Sol é introduzida, a de que cada rebanho tenha um número maior de touros em relação ao número de vacas; no entanto, essa condição falha para o rebanho do gado amarelo. Para o autor, isso pode indicar duas coisas: ou Arquimedes cometeu um erro em seu cálculo que o levou a afirmar que cada rebanho teria um número maior de touros ou propositalmente ele incluiu esta afirmação falsa no poema, a fim de desmascarar aqueles que não conseguissem resolver as equações do problema. Caso a passagem dos versos 7-8 seja considerada na sua literalidade, o problema torna-se impossível de ser resolvido.

O escólio do poema é uma prova de que ao menos uma resposta para a primeira parte do problema foi encontrada na antiguidade, ainda que em desacordo com as exigências da segunda parte. Mesmo incompleta, a resposta do escólio já dá conta de um número muito maior do que os que eram usualmente tratados na matemática grega. É possível conjecturar que parte dos matemáticos que tenham lidado com o *Problema Bovino* na antiguidade chegaram até a resolução da primeira parte, tendo em seguida desistido do problema dada a sua complexidade.

5. Resolução do *Problema Bovino* usando simbologia matemática atual

5.1. Resolução da primeira parte

A solução proposta por Joyce (2006) para a primeira parte do *Problema Bovino* de Arquimedes (ainda sem o acréscimo de restrições relacionadas a números quadrados ou triangulares) segue os seguintes passos:

1) Chamemos de B o número de touros brancos, P o número de touros pretos, M o número de touros malhados e A o número de touros amarelos. Então temos:

[9] A necessidade de expressar o grande número do gado do Sol aproxima o *Problema Bovino* de outro trabalho de Arquimedes, *O Arenário*, no qual o matemático se propõe a calcular quantos grãos de areia são necessários para preencher o universo e para expressar a sua quantidade, cria um sistema de expressão numérica para grandes números.

[10] Outra leitura possível para esta passagem é "em cada rebanho havia touros pesados em número", ou seja, em cada rebanho havia muitos touros, sendo redundante já que em todos os rebanhos havia muitos animais, sejam touros ou vacas.

$$B = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) P + A = \frac{5}{6} P + A \qquad \text{(I)}$$

$$P = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) M + A = \frac{9}{20} M + A \qquad \text{(II)}$$

$$M = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) B + A = \frac{13}{42} B + A \qquad \text{(III)}$$

2) A partir deste sistema de equações lineares, uma estratégia de solução é obter a quantidade de touros brancos em função da quantidade de amarelos, encadeando as equações (I), (II) e (III):

$$B = \frac{5}{6} P + A = \frac{5}{6}\left(\frac{9}{20} M + A\right) + A = \frac{5}{6}\left(\frac{9}{20}\left(\frac{13}{42} B + A\right) + A\right) + A$$

ou seja:

$$B = \frac{2226}{891} A$$

ou ainda:

$$891\, B = 2226\, A$$

Para que as quantidades nos dois membros sejam valores inteiros positivos, B deve ser um múltiplo de 2226, e A, um múltiplo de 891. Simbolicamente, escolhendo t como um parâmetro inteiro: $B = 2226\, t$ e $A = 891\, t$.

3) Retornando à equação (III), temos:

$$M = \frac{13}{42} B + A$$

$$M = \frac{13}{42} 2226\, t + 891\, t$$

$$M = 1580\, t$$

4) E, finalmente, retomando a equação (II):

$$P = \frac{9}{20} M + A$$

$$P = \frac{9}{20} 1580\, t + 891\, t$$

$$P = 1602\ t$$

5) Em termos do parâmetro t, as quantidades de touros brancos, pretos, malhados e amarelos são, portanto:

$$B = 2226\ t$$

$$P = 1602\ t$$

$$M = 1580\ t$$

$$A = 891\ t$$

6) Seguindo para as informações a respeito das quantidades de vacas brancas (b), pretas (p), malhadas (m) e amarelas (a), temos quatro novas equações:

$$b = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(P + p) = \frac{7}{12}(P + p) \qquad \text{(IV)}$$

$$p = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(M + m) = \frac{9}{20}(M + m) \qquad \text{(V)}$$

$$m = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(A + a) = \frac{11}{30}(A + a) \qquad \text{(VI)}$$

$$a = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(B + b) = \frac{13}{42}(B + b) \qquad \text{(VII)}$$

7) Novamente, faz-se o encadeamento das equações, para escrever b em função de B, P, M e A:

$$b = \frac{7}{12}\left(P + \left(\frac{9}{20}\left(M + \left(\frac{11}{30}\left(A + \frac{13}{42}(B + b)\right)\right)\right)\right)\right)$$

$$293391\ b = 176400\ P + 79380\ M + 29106\ A + 9009\ B$$

Usando os valores já parametrizados de B, P, M e A:

$$293391\ b = 176400 \bullet 1602\ t + 79380 \bullet 1580\ t + 29106 \bullet 891\ t + 9009 \bullet 2226\ t$$

$$b = \frac{454\,000\,680}{293\,391}\ t$$

8) Retomando a equação (VII), acrescida do valor obtido para b, temos:

$$a=\frac{13}{42}(B+b)=\frac{13}{42}\left(2226\,t+\frac{454\,000\,680}{293\,391}\,t\right)$$

$$a=\frac{342\,670\,419}{293\,391}\,t$$

9) Retomando a equação (VI), acrescida do valor obtido para a, temos:

$$m=\frac{11}{30}(A+a)=\frac{11}{30}\left(891\,t+\frac{342\,670\,419}{293\,391}\,t\right)$$

$$m=\frac{221\,496\,660}{293\,391}\,t$$

10) Retomando a equação (V), acrescida do valor obtido para m, temos:

$$p=\frac{9}{20}(M+m)=\frac{9}{20}\left(1580\,t+\frac{221\,496\,660}{293\,391}\,t\right)$$

$$p=\frac{308\,274\,498}{293\,391}\,t$$

11) Temos, então, as quantidades de vacas das quatro cores expressas sob o parâmetro t como:

$$b=\frac{454\,000\,680}{293\,391}\,t$$

$$p=\frac{308\,274\,498}{293\,391}\,t$$

$$m=\frac{221\,496\,660}{293\,391}\,t$$

$$a=\frac{342\,670\,419}{293\,391}\,t$$

12) Nas frações acima, todos os numeradores e denominadores são divisíveis por 63, podendo ser simplificadas para:

$$b=\frac{7\,203\,360}{4\,657}\,t$$

$$p=\frac{4\,893\,246}{4\,657}\,t$$

$$m = \frac{3\,515\,820}{4\,657}\,t$$

$$a = \frac{5\,439\,213}{4\,657}\,t$$

Como 4657 é primo, as frações somente resultarão em valores inteiros quando t for um múltiplo, o que nos leva a outro parâmetro, isto é, $t = 4657\,s$.

13) Com a substituição de $t = 4657\,s$, as quantidades serão dadas por:

$$B = 2226 \bullet 4657\,s = 10\,366\,482\,s$$

$$P = 1602 \bullet 4657\,s = 7\,460\,514\,s$$

$$M = 1580 \bullet 4657\,s = 7\,358\,060\,s$$

$$A = 891 \bullet 4657\,s = 4\,149\,387\,s$$

$$b = 7\,203\,360\,s$$

$$p = 4\,893\,246\,s$$

$$m = 3\,515\,820\,s$$

$$a = 5\,439\,213\,s$$

Em que s também é um inteiro positivo. A menor solução para o total do rebanho $(s = 1)$ é, portanto:

$$B + P + M + A + b + p + m + a =$$

$$= 10366482 + 7460514 + 7358060 + 4149387 + 7203360 + 4893246 + 3515820 + 5439213 = 50\,386\,082$$

Este resultado resolve a primeira parte do problema, antes das exigências associadas aos números quadrados e triangulares. De acordo com Arquimedes, quem consegue realizar estas operações "não poderá ser chamado de ignorante ou inábil para com os números, mas ainda não será contado como sábio".

5.2. Resolução da segunda parte

Com as restrições da segunda parte, deve-se ter as quantidades de touros brancos e pretos, somadas, igual a um número quadrado e as quantidades de touros malhados e amarelos, somadas, igual a um número triangular. Simbolicamente:

$$B+P=u^2$$

$$M+A=\frac{k(k+1)}{2}$$

A expressão $\frac{k(k+1)}{2}$ corresponde à soma dos k primeiros números naturais, característica que se observa nos números triangulares.[11]

Pelos valores obtidos para B e P, parametrizados em s, podemos escrever:

$$B+P=10\,366\,482\,s+7\,460\,514\,s=u^2$$

$$17\,826\,996\,s=u^2$$

Que pode ser reescrito como:

$$(2^2 \bullet 957 \bullet 4657)\,s=u^2$$

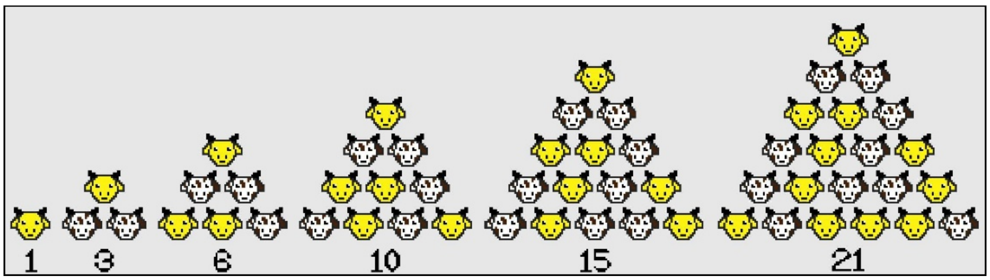

Figura 2: Os primeiros seis números triangulares inteiros positivos, representados por touros amarelos e malhados (autoria própria)

Observando que, na reescrita do número 17 826 996 como produto de fatores primos, o único fator que está elevado a um índice par é o 2, para que se tenha um número quadrado no membro da esquerda é necessário que s seja o produto dos outros dois fatores, podendo incluir, eventualmente, algum outro número que já seja um quadrado.

$$s=(957 \bullet 4657)\,p^2=4\,456\,749\,p^2$$

Com relação ao número triangular, pelos valores obtidos para M e A, também na forma parametrizada em s, podemos escrever:

$$M+A=7\,358\,060\,s+4\,149\,387\,s=11\,507\,447\,s=\frac{k(k+1)}{2}$$

[11] Também pode ser pode ser entendida como a soma dos *k* primeiros termos de uma progressão aritmética na qual tanto o primeiro termo como a razão são iguais a 1.

E, substituindo o valor obtido para s logo acima, temos:

$$11507447 \bullet 4456749\ p^2 = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$51\,285\,802\,909\,803\ p^2 = \frac{k(k+1)}{2}$$

Completando o quadrado no membro da direita, isto é, observando que $\frac{k(k+1)}{2} = \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}\left((2k+1)^2 - 1\right)$, temos:

$$51\,285\,802\,909\,803\ p^2 = \frac{1}{8}\left((2k+1)^2 - 1\right)$$

$$410\,286\,423\,278\,424\ p^2 = (2k+1)^2 - 1$$

Chamando $2k+1$ de q, escreve-se a seguinte expressão:

$$q^2 - 410\,286\,423\,278\,424\ p^2 = 1$$

A expressão obtida é uma equação diofantina quadrática que pode ser generalizada na forma $q^2 - C\ p^2 = 1$.

Esta equação e um dos métodos de sua resolução foram atribuídos equivocadamente por Euler ao matemático inglês John Pell (1611-1685), como afirma Weil (1984, p. 174). Uma provável explicação do engano cometido pelo matemático suíço é sua leitura – pouco atenciosa – da obra *Arithmetica infinitorum*, de John Wallis. Nesta obra, Wallis cita realmente a autoria de Pell em outras contribuições, mas dá os devidos créditos a William Brouncker (1620-1684) no que diz respeito à resolução do problema que assim havia sido postulado por Fermat.[12]

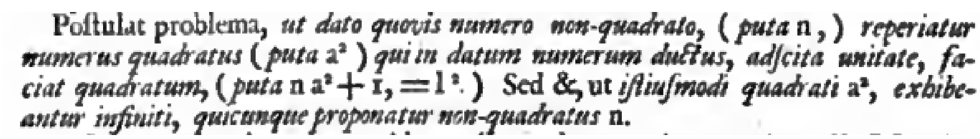
Poſtulat problema, *ut dato quovis numero non-quadrato,* (*puta* n ,) *reperiatur numerus quadratus* (*puta* a²) *qui in datum numerum ductus, adſcita unitate, faciat quadratum,* (*puta* n a² + 1, = l².) Sed &, ut *iſtiuſmodi quadrati* a², *exhibeantur infiniti, quicunque proponatur non-quadratus* n.

Figura 3: Trecho de *Arithmetica infinitorum* (Wallis, 1655, p. 789)

Além disso, problemas semelhantes e técnicas de solução são encontradas nas obras dos matemáticos indianos Bramaghupta, Bháskara II e Narayana (O'CONNOR; ROBERTSON, 2002), usando o método denominado *chakravala*.

[12] O problema requer que, dado qualquer número não quadrado (digamos n), encontre-se um número quadrado (digamos a^2) que multiplicado e somado à unidade faça um número quadrado (digamos $n\,a^2+1=l^2$) e que sejam apresentados infinitos quadrados, qualquer que seja o não-quadrado n proposto.

Weil (1984) conjectura uma gênese de tal problema como um processo para se obter aproximações racionais de raízes quadradas de números que não são quadrados perfeitos, já identificado por Arquimedes e outros matemáticos gregos.

Isso se dá, pois, se reescrevermos a equação $x^2 - N\,y^2 = 1$ como $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{N\,y^2+1}{y^2}$ teremos $\frac{x}{y} = \sqrt{N + \frac{1}{y^2}}$ que, para um valor suficientemente grande de y, resulta em $\frac{x}{y} \approx \sqrt{N}$.

Por exemplo, a fração $\frac{1351}{780}$, utilizada por Arquimedes na obra *A quadratura do círculo* como uma aproximação de $\sqrt{3}$ pode ser obtida por esse método. Escrevendo na simbologia atual, a fração $\frac{7}{4}$ formada pelo par de números inteiros que tornam a equação $x^2 - 3\,y^2 = 1$ verdadeira, é um valor aproximado da raiz quadrada de 3.

Lenstra Jr (2002, p. 182) explica que Lagrange, em 1768, provou que se (x_1, y_1) é uma solução de uma equação “de Pell”, o par (x_n, y_n), obtido por $x_n + y_n\sqrt{N} = (x_1 + y_1\sqrt{N})^n$ também o será. E, como $(7 + 4\sqrt{3})^3 = 1351 + 780\sqrt{3}$, o número racional $\frac{1351}{780}$ é outra aproximação de $\sqrt{3}$, bem mais precisa que $\frac{7}{4}$.

Retornando à equação obtida na resolução do *Problema Bovino*, a questão pode ser reformulada como: *Determine valores* q *e* p, *tais que a fração* $\frac{q}{p}$ *seja uma aproximação da raiz quadrada de* $410\,286\,423\,278\,424$. Isso certamente é um desafio bem maior que encontrar a aproximação de $\sqrt{3}$, mas acompanha os mesmos procedimentos do exemplo.

Carl Ernst August Amthor (1845–1916), já mencionado na seção 4.1 como o primeiro a resolver a segunda parte do problema de Arquimedes, observou que a decomposição do número $410\,286\,423\,278\,424$ se mostra como $(2 \bullet 4657)^2 \bullet N'$, sendo que o terceiro fator, $N' = 4\,729\,494 = 2 \bullet 3 \bullet 7 \bullet 11 \bullet 29 \bullet 353$, é um produto em que nenhum primo está elevado ao quadrado. Em seguida, Amthor considerou que, se (x_1, y_1) é solução da equação original com o coeficiente N (com o valor na ordem de trilhões), então o par $(x_1, 2 \bullet 4657 \bullet y_1)$ é solução da equação que tem como coeficiente N' (na ordem de milhões) e, para algum n será obtida a n-ésima solução:

$$x_n + 2 \bullet 4657 \bullet y_n\sqrt{N'} = (x_1 + y_1\sqrt{N'})^n.$$

O desafio fica “reduzido”, como diz Lenstra Jr. (2002, p. 186) a duas etapas “mais simples”: primeiro, resolver a equação “de Pell” para $N' = 4\,729\,494$ e, depois, encontrar o menor valor de n para o qual y_n é divisível por $(2 \bullet 4657)$.

Os cálculos de Amthor para resolver a primeira dessas etapas mais simples ocuparam cerca de três páginas de seu artigo de 1880 e a resposta intermediária pode ser expressa como

$$u = 109\,931\,986\,732\,829\,734\,979\,866\,232\,821\,433\,543\,901\,088\,049 + 50\,549\,485\,234\,315\,033\,074\,477\,819\,735\,540\,408\,986\,340 \bullet \sqrt{N}$$

Na solução da segunda etapa, o matemático alemão chega ao valor de $n = 2329$, que leva à afirmação de que o par $(x\,,y)$, tal que $x + y\sqrt{N} = u^{2329}$ é a solução da equação final da segunda parte do *Problema Bovino*.

Lenstra Jr (2002), alegando que Amthor deixou de reunir todos os resultados em uma apresentação única, apresenta o seguinte quadro, em que são exibidas todas as infinitas soluções, discriminando ainda as quantidades de animais em suas categorias:

All solutions to the cattle problem of Archimedes

$$w = 300\,426607\,914281\,713365 \cdot \sqrt{609} + 84\,129507\,677858\,393258 \cdot \sqrt{7766}$$

$$k_j = (w^{4658 \cdot j} - w^{-4658 \cdot j})^2 / 368\,238304 \qquad (j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

jth solution	*bulls*	*cows*	*all cattle*
white	$10\,366482 \cdot k_j$	$7\,206360 \cdot k_j$	$17\,572842 \cdot k_j$
black	$7\,460514 \cdot k_j$	$4\,893246 \cdot k_j$	$12\,353760 \cdot k_j$
dappled	$7\,358060 \cdot k_j$	$3\,515820 \cdot k_j$	$10\,873880 \cdot k_j$
brown	$4\,149387 \cdot k_j$	$5\,439213 \cdot k_j$	$9\,588600 \cdot k_j$
all colors	$29\,334443 \cdot k_j$	$21\,054639 \cdot k_j$	$50\,389082 \cdot k_j$

Figura 4: Todas as soluções do *Problema Bovino* (Lenstra Jr, 2002, p. 187)

Ainda que as diversas tentativas e apresentações de solução ocupem um período relativamente curto da história contemporânea, elas aproveitam-se de técnicas de computação antigas e do advento de equipamentos para acelerar procedimentos iterativos. O interesse pelo desafio proposto por Arquimedes age, portanto, como um catalisador de teorias, mantendo-o como um tema de estudos a partir do qual podem ser encaminhados estudos de resolução de sistemas e aproximação racional de irracionais algébricos.

Ao tomar conhecimento do problema, uma dúvida legítima que ocorre é: o próprio Arquimedes o resolveu (ou poderia tê-lo resolvido)? Acompanhamos, neste ponto, as considerações de Vardi (1998) que, tomando como base afirmações de Wilbur Knorr, David Fowler, dentre outros, assinala que é admissível que se pudesse chegar a uma equação do tipo $q^2 - C\,p^2 = 1$ e que também já eram conhecidos métodos para a obtenção de aproximações racionais para a raiz quadrada de números que não são quadrados perfeitos.

Arquimedes teria conhecimento, então, de que equações como essas – mesmo com coeficientes menores que 410 286 423 278 424 – possuem soluções, e deve ter conjecturado a garantia de respostas para o problema proposto e que mesmo a menor solução seria expressa com números consideravelmente grandes. Não há, no entanto, nos trabalhos preservados do matemático de Siracusa, uma prova desta especulação que também foi alvo dos estudos de Fermat, tendo sido demonstrada afinal por Lagrange, a saber, que toda equação "de Pell" tem solução (FOWLER, 1981, *apud* VARDI, 1998).

6. Sobre a tradução

Para a tradução do *Problema Bovino* de Arquimedes, foi usado como base o texto grego estabelecido por Charles Mugler (ARQUIMEDES, 1971). A fim de não prejudicar o conteúdo matemático do poema ao traduzi-lo para o português, optou-se por uma tradução em prosa. Ao fim de cada parágrafo da tradução foram adicionados os números dos versos correspondentes no original grego.

7. Agradecimentos

Agradecemos aos membros do *Grupo Gnómon*, vinculado à *Areté – Centro de Estudos Helênicos*, instituição no seio da qual este trabalho foi desenvolvido: Augusto de Amaral Sibo, Eduardo Henrique Peiruque Kickhöfel, Fernanda Birolli Abrahão, João F. N. B. Cortese, Marcos Guimarães Barreiros, Nataly Ianicelli Cruzeiro, Taimara Passero, Tiago Tranjan e Vicente A. de Arruda Sampaio.

Bibliografia

ARQUIMEDES. 1971. *Œuvres*. *Tome III : Des corps flottants – Stomachion – La méthode – Le livre des lemmes – Le problèmes des bœufs*. Texto estabelecido e traduzido por Charles Mugler. Paris, Belles Lettres.

BELL, Adam Henry. 1895. The "Cattle Problem." By Archimedies 251 B. C. *The American Mathematical Monthly*, [S.L.], v. 2, n. 5, p. 140-141, maio.

BENSON, Geoffrey C. 2014. Archimedes the Poet: generic innovation and mathematical fantasy in the cattle problem. *Arethusa*, [S.L.], v. 47, n. 2, p. 169-196.

DIJKSTERHUIS, Eduard Jan. 1956. *Archimedes*. Copenhagen: Ejnar Munksgaard.

HOMERO. 1919. *Odyssey, Volume I: Livros 1-12*. Cambridge-MA, Harvard University Press.

JOYCE, David. 2006. *Archimedes' Cattle Problem*. 2006. Disponível em: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/numbers/cattle.pdf. Acesso em 10 maio 2021.

LENSTRA JR, Hendrik W. 2002. Solving the Pell equation. *Notices of the AMS*, v. 49, n. 2, p. 182-192.

LOOS, Rüdiger. 1977. Amthor's solution of Archimedes' cattle problem. *Acm Sigsam Bulletin*, [S.L.], v. 11, n. 1, p. 4-7, fev. 1977. Association for Computing Machinery (ACM).

NETZ, Reviel. 2009. *Ludic proof* : Greek mathematics and the Alexandrian aesthetic. Cambridge, Nova Iorque, Cambridge University Press.

O'CONNOR, J J; ROBERTSON, E F. *Pell's equation*. 2002. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pell/. Acesso em: 10 nov.

PATON, William Roger. 1918. The Greek Anthology in Five Volumes: 5. Londres, Heinemann.

SCHREIBER, Peter. 1993. A note on the cattle problem of Archimedes. *Historia Mathematica*, [S.L.], v. 20, n. 3, p. 304 – 306, ago.

TAUB, Liba. 2013. On the Variety of 'Genres' of Greek Mathematical Writing: thinking about mathematical texts and modes of mathematical discourse. *Writing Science*, [S.L.], p. 333-366, 17 jun.

VARDI, Ilan. 1998. Archimedes' Cattle Problem. *The American Mathematical Monthly*, [S.L.], v. 105, n. 4, p. 305-319, abr.

WALLIS, John. 1656. *Arithmetica Infinitorum*. Oxford.

WEIL, André. 1984. *Number Theory* – An Approach through History. Boston, Birkhäuser.

WEST, Martin Litchfield. 1974. *Studies in Greek Elegy and Iambus.* Berlin, Gruyter.

WILLIAMS, H. C.; GERMAN, R. A.; ZARNKE, C. R.. 1965. Solution of the Cattle Problem of Archimedes. *Mathematics Of Computation*. [S.L.], v. 19, n. 92, p. 671-674. American Mathematical Society (AMS).

Henrique Marins de Carvalho
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP – campus de São Paulo – Brasil

E-mail: hmarins@ifsp.edu.br

Rodrigo Lima de Oliveira
Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas – Universidade de São Paulo (USP) – Campus de São Paulo – Brasil

E-mail: rodrigue.lima.oliveira@gmail.com

8. Tradução

Problema,

que Arquimedes compôs em forma epigramática e enviou aos interessados nestes assuntos em Alexandria, em uma carta dirigida a Eratóstenes de Cirene.[13]

Ó estrangeiro,[14] calcule[15] prestando atenção, se você for sábio; a multitude do gado do Sol,[16] quantos outrora pastavam nas planícies da ilha Trinácria da Sicília,[17] divididos em quatro rebanhos de cores distintas: um branco como leite, outro de uma cor preta lustrosa, o terceiro amarelo, e o último malhado. (1–7)

Em cada rebanho havia uma quantidade de touros sobressaindo-se em número,[18] formando tal proporção: ó estrangeiro, imagine; os de pelo branco eram iguais a metade mais um terço dos pretos, mais todos os amarelos juntos. Já os pretos eram iguais a um quarto mais um quinto dos malhados, mais todos os amarelos juntos. Observe que os touros restantes, os malhados, eram iguais a um sexto mais um sétimo dos brancos, mais todos os amarelos juntos. (7–16)

Esta era a proporção das vacas: as brancas eram iguais a um terço mais um quarto de todo o rebanho preto. Já as vacas pretas eram iguais a um quarto mais um quinto das vacas malhadas, quando iam para o pasto com os touros da mesma cor. Já as malhadas eram em número igual a um quinto mais um sexto do rebanho amarelo. As amarelas eram em número igual a metade de um terço[19] mais um sétimo do rebanho branco. (17–26)

Estrangeiro, uma vez que você diga com exatidão a quantidade do gado do Sol, separando o número de touros bem nutridos, e também, a quantidade de vacas conforme cada uma das cores, você não poderá ser chamado de ignorante ou inábil para com os números, mas ainda não será contado[20] como sábio. (27–31)

Mas venha e entenda também todas essas condições que afetam o número do gado do Sol. Quando os touros brancos misturavam seu número com os pretos, se mantinham todos em formação de igual profundidade e largura,[21] e as planícies da Trinácria enchiam-se com a sua multidão. Além disso, quando os touros amarelos e malhados eram reunidos, permaneciam de um modo que seu número, começando pelo um, crescia lentamente até

[13] Ver nota 2.

[14] ξεῖνε tanto pode significar hóspede quando estrangeiro. Optou-se por estrangeiro na tradução ao considerar a informação de que o poema fora enviado de Arquimedes (de Siracusa) para Eratóstenes de Cirene, residente em Alexandria.

[15] μέτρησον tanto pode significar calcular quanto medir. A segunda opção lida em conjunto com as restrições geométricas para a resolução do problema.

[16] Hélio, na mitologia grega é o deus e personificação do Sol.

[17] Θρινακίης, de três pontas, é o antigo nome da Sicília, fazendo referência ao seu formato triangular.

[18] Ver seção 4.2.

[19] O mesmo que $\frac{1}{6}$.

[20] Um trocadilho com o tipo de problema proposto, um problema de contagem.

[21] Ou seja, formavam um quadrado perfeito.

completar uma figura triangular,[22] não havendo touros de outras cores, nem sobrando nenhum deles. (31–40)

Se você determinar todas estas coisas reunindo-as na mente, e fornecendo todas as proporções, estrangeiro, você sairá vitorioso sabendo que és perfeito nesse tipo de sabedoria. (41–44)

Escólio[23]

Arquimedes expôs assim, de maneira clara neste problema, que deve haver quatro rebanhos de gado; o primeiro rebanho compreende touros brancos e vacas brancas, cujo número se eleva a catorze miríades de miríades,[24] aumentadas de quinhentas e oitenta e duas miríades, e de sete mil trezentos e sessenta unidades; o segundo rebanho compreende touros negros e vacas negras, cujo número se eleva a nove miríades de miríades, aumentadas de oito mil oitocentos e trinta miríades, e de oitocentas unidades; o terceiro rebanho compreende touros malhados e vacas malhadas, cujo número se eleva a oito miríades de miríades, aumentadas de seis mil novecentas e noventa e uma miríades, e de quatrocentas unidades; o quarto rebanho compreende o gado amarelo, cujo número se eleva a sete miríades de miríades, aumentadas de seis mil setecentas e oito miríades, e de oito mil unidades; segue-se que a soma dos quatro rebanhos juntos se eleva a quarenta miríades de miríades, aumentadas de três mil cento e doze miríades, e de seis mil quinhentas e sessenta unidades. O rebanho de touros brancos tem oito miríades de miríades, aumentado de duas mil novecentas e trinta e uma miríades, e de oito mil quinhentos e sessenta unidades, o número de vacas brancas é de cinco miríades de miríades, aumentadas de sete mil seiscentos e cinquenta miríades, e de oito mil e oitocentas unidades; o rebanho dos touros pretos tem cinco miríades de miríades, aumentadas de nove mil seiscentas e oitenta e quatro miríades, e mil cento e vinte unidades, e o número de vacas negras é de três miríades de miríades, aumentadas de nove mil cento e quarenta e cinco miríades, e de nove mil seiscentos e oitenta unidades; o rebanho de touros malhados tem cinco miríades de miríades, aumentado de oito mil oitocentas e sessenta e quatro miríades, e de quatro mil e oitocentas unidades, e o número de vacas malhadas é de duas miríades de miríades, aumentadas de oito mil cento e vinte e seis miríades, e de cinco mil e seiscentas unidades; o rebanho de touros amarelos tem três miríades de miríades, aumentadas de três mil cento e noventa e cinco miríades, e de novecentos e sessenta unidades, e o número de vacas amarelas é de quatro miríades de miríades, aumentadas de três mil quinhentas e treze miríades, e de sete mil e quarenta unidades. O número dos touros brancos é assim igual à soma da metade mais a terça parte do número dos touros pretos, aumentado do número dos touros amarelos, o número dos touros pretos é igual à soma da quarta e da quinta parte do número dos touros malhados, mais todos os touros amarelos, o número dos touros malhados é igual à soma da sexto e da sétima parte do número dos touros brancos, mais todos os touros amarelos, o número das vacas brancas é igual à soma

[22] Ou seja, formavam um triângulo equilátero.

[23] Os valores apresentados não correspondem à menor solução possível, mas são corretos, se considerarmos s=80, nas expressões indicadas no final da seção 5.1.

[24] Uma miríade de miríade é o mesmo que 10.000².

da terça e da quarta parte de todo o rebanho de gado preto, o número das vacas pretas é igual à soma da quarta e da quinta parte de todo o rebanho do gado malhado, e o número das vacas malhadas é igual à soma da quinta e da sexta parte de todo o gado amarelo. Por fim, o número de vacas amarelas era igual à soma da sexta e da sétima parte de todo o rebanho de gado branco. Além disso, quando os rebanhos dos touros brancos e dos touros pretos eram colocados juntos, formavam um número quadrado;[25] e quando o rebanho dos touros amarelos e o dos malhados eram colocados juntos formavam um número triangular,[26] conformemente às regras indicadas para cada cor.

[25] Essa informação não é correta, pois a soma dos valores apresentados para os rebanhos de touros brancos e pretos soma $1\,426\,159\,680$, que não é um quadrado perfeito. O quadrado mais próximo é $37764^2 = 1\,426\,119\,696$.

[26] Também não é verdadeira, pois os valores somam 920 595 760 e o número triangular mais próximo é $\frac{42908 \bullet 42909}{2} = 920\,569\,686$.

9. Texto original grego

Πρόβλημα,

ὅπερ Ἀρχιμήδης ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρὼν τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν ἐν τῇ πρὸς Ἐρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον ἐπιστολῇ.

Πληθὺν Ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον
φροντίδ’ ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
πόσση ἄρ’ ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτ’ ἐβόσκετο νήσου
Θρινακίης τετραχῇ στίφεα δασσαμένη
χροιὴν ἀλλάσσοντα · τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,
κυανέῳ δ’ ἕτερον χρώματι λαμπόμενον,
ἄλλο γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον. Ἐν δὲ ἑκάστῳ
στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι
συμμετρίης τοιῆσδε τετευχότες · ἀργότριχας μὲν
κυανέων ταύρων ἡμίσει ἠδὲ τρίτῳ
καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὦ ξεινε, νόησον,
αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ τε μέρει
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσί τε πᾶσιν.
Τοὺς δ’ ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθρει
ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει ἑβδομάτῳ τε
καὶ ξανθοῖς αὐτοὺς πᾶσιν ἰσαζομένους.
Θηλείαισι δὲ βουσὶ τάδ’ ἔπλετο · λευκότριχες μὲν
ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης
τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκὲς ἶσαι·
αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο
σὺν ταύροις πάσαις εἰς νομὸν ἐρχομέναις.
Ξανθοτρίχων δ’ ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδὲ καὶ ἕκτῳ
ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχον τετραχῇ.
Ξανθαὶ δ’ ἠριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμισει ἶσαι
ἀργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τε μέρει.
Ξεῖνε, σὺ δ’ Ἠελίοιο βόες πόσαι ἀτρεκὲς εἰπών,
χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,
χωρὶς δ’ αὖ θήλειαι ὅσαι κατὰ χροιὰν ἕκασται,
οὐκ ἄιδρίς κα λέγοι’ οὐδ’ ἀριθμῶν ἀδαής,
οὐ μήν πώ γε σοφοῖς ἐναρίθμιος. Ἀλλ’ ἴθι φράζευ
καὶ τάδε πάντα βοῶν Ἠελίοιο πάθη.
Ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο πληθύν
κυανέοις, ἵσταντ’ ἔμπεδον ἰσόμετροι
εἰς βάθος εἰς εὖρός τε, τὰ δ’ αὖ περιμήκεα πάντῃ
πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.
Ξανθοὶ δ’ αὖτ’ εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
ἵσταντ’ ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι

σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον οὔτε προσόντων
ἀλλοχρόων ταύρων οὔτ’ ἐπιλειπομένων.
Ταῦτα συνεξευρὼν καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίσας
καὶ πληθέων ἀποδούς, ξεῖνε, τὰ πάντα μέτρα
ἔρχεο κυδιόων νικηφόρος ἴσθι τε πάντως
κεκριμένος ταύτῃ γ’ ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.

Σχόλιον

Τὸ μὲν οὖν πρόβλημα διὰ τοῦ ποιήματος ὁ Ἀρχιμήδης ἐδήλωσε σαφῶς· ἰστέον δὲ λεγόμενον, ὅτι τέσσαρας ἀγέλας εἶναι δεῖ βοῶν, λευκοτρίχων μὲν μίαν ταύρων καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθος ὁμοῦ συνάγει μυριάδας διπλᾶς ιδ’ καὶ ἁπλᾶς φπβ΄ καὶ μονάδας ͵ζτξ΄, κυανοχρόων δ’ ἄλλην ὁμοῦ ταύρων καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθός ἐστι μυριάδων διπλῶν ἐννέα καὶ ἁπλῶν ͵ηωλ΄ καὶ μονάδων ω΄, μιξοτρίχων δ’ ἄλλην ταύρων καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθός ἐστι μυριάδων διπλῶν η΄ καὶ ἁπλῶν ͵ςϡϛα΄ καὶ μονάδων υ΄· τῆς δὲ λοιπῆς ἀγέλης ξανθοχρόων συνάγει τὸ πλῆθος διπλᾶς μυριάδας ζ καὶ ἁπλᾶς ͵ςψη΄, μονάδας δὲ ͵η΄· ὥστε συνάγεσθαι ὁμοῦ τὸ πλῆθος τῶν δ’ ἀγελῶν μυριάδας διπλᾶς μ΄ καὶ ἁπλᾶς ͵γριβ΄ καὶ μονάδας ͵ςφξ΄. Καὶ ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίχων ταύρων ἔχει μυριάδας διπλᾶς η΄ καὶ ἁπλᾶς ͵βϡλα΄ καὶ μονάδας ͵ηφξ΄, θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς ε΄ καὶ ἁπλᾶς ͵ζχν΄ καὶ μονάδας ͵ηω΄, ἡ δὲ ἀγέλη τῶν κυανοχρόων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς ε΄ καὶ ἁπλᾶς ͵θχπδ΄ καὶ μονάδας ͵αρκ΄, θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς γ΄ καὶ ἁπλᾶς ͵θρμε΄ καὶ μονάδας ͵θχπ΄, ἡ δ’ ἀγέλη τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς ε΄ καὶ ἁπλᾶς ͵ηωξδ΄ καὶ μονάδας ͵δω΄ [revisar], θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς β΄ καὶ ἁπλᾶς ͵ηρκς΄ καὶ μονάδας ͵εχ΄, ἡ δ’ ἀγέλη τῶν ξανθοχρωμάτων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς γ΄ καὶ ἁπλᾶς ͵γρςε΄ καὶ μονάδας ͵ϡξ΄, θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς δ΄ καὶ ἁπλᾶς ͵γφιγ΄ καὶ μονάδας ͵ζμ΄. Καί ἐστι τὸ πλῆθος τῶν λευκοτρίχων ταύρων ἴσον τῷ ἡμίσει καὶ τρίτῳ μέρει τοῦ πλήθους τῶν κυανοχρόων ταύρων καὶ ἔτι ὅλῃ τῇ τῶν ξανθοχρωμάτων ἀγέλῃ, τὸ δὲ πλῆθος τῶν κυανοχρωμάτων ἴσον τῷ τετάρτῳ καὶ πέμπτῳ μέρει τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων καὶ ὅλῳ τῷ πλήθει τῶν ξανθοχρωμάτων, τὸ δὲ πλῆθος τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων ἴσον τῷ ἕκτῳ καὶ ἑβδόμῳ μέρει τῶν λευκοτρίχων ταύρων καὶ ἔτι τῷ πλήθει ὅλῳ τῶν ξανθοχρωμάτων ταύρων, καὶ πάλιν τὸ πλῆθος τῶν λευκῶν θηλειῶν ἴσον τῷ τρίτῳ καὶ τετάρτῳ μέρει ὅλης τῆς ἀγέλης τῶν κυανοχρόων, τὸ δὲ τῶν κυανοχρόων ἴσον τῷ τετάρτῳ καὶ πέμπτῳ μέρει τῆς ὅλης ἀγέλης τῶν ποικιλοτρίχων, τὸ δὲ τῶν ποικιλοτρίχων ἴσον τῷ πέμπτῳ καὶ ἕκτῳ μέρει τῆς ὅλης τῶν ξανθῶν βοῶν. Πάλιν δὲ τὸ τῶν ξανθῶν θηλειῶν πλῆθος ἦν ἴσον τῷ ἕκτῳ τε καὶ ἑβδόμῳ μέρει τῆς ὅλης ἀγέλης τῶν λευκῶν βοῶν. Καὶ ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίχων ταύρων καὶ ἡ τῶν κυανοχρόων ταύρων συντεθεῖσα ποιεῖ τετράγωνον ἀριθμόν, ἡ δ’ ἀγέλη τῶν ξανθοτρίχων ταύρων μετὰ τῆς ἀγέλης τῶν ποικιλοχρόων συντεθεῖσα ποιεῖ τρίγωνον, ὡς ἔχει τὰ τῶν ὑποκειμένων κανόνων καθ’ ἕκαστον χρῶμα.