Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 24, nº48 - pp. 90–129
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

UM CONHECIMENTO "NÃO TÃO COMPLETO": SOBRE OS ESTUDOS NÃO-ARQUIMEDIANOS DE AMOROSO COSTA[1]

Rodrigo Rafael Gomes
Pesquisador do GPHM, Unesp campus Rio Claro. Professor do IFSP campus Bragança Paulista.[2]

(aceito para publicação em outubro de 2023)

Resumo

O objeto deste trabalho são os estudos sobre matemática não-arquimediana feitos pelo matemático, engenheiro e astrônomo brasileiro Manuel Amoroso Costa, que, em 1928, realizou uma série de conferências sobre essa matéria na Faculté des Sciences de Paris, Sorbonne Université. Sem poder contar com os manuscritos dessas conferências, que desapareceram, para esta pesquisa foram considerados outros documentos de trabalho do arquivo pessoal do autor, publicações suas, obras de outros autores e estudos históricos sobre o tema por ele investigado, bem como artigos e notas de jornais da época. Como resultado das análises dessas fontes, este trabalho expõe um panorama dos estudos não-arquimedianos de Amoroso Costa, buscando situá-los em seu próprio tempo, e apresenta questões sobre as quais, possivelmente, ele se debruçou.

Palavras-chave: Manuscritos de cientistas, Arquivos históricos digitais, Geometria, Número, Continuidade.

[1] O presente trabalho resulta da pesquisa de pós-doutoramento do autor, realizada junto ao Grupo de Pesquisa em História da Matemática (GPHM), da Unesp campus Rio Claro, sob a supervisão do professor doutor Sergio Roberto Nobre. Para realização da pesquisa, o autor foi contemplado com Afastamento Remunerado Docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, edital DGP/PRO-DI/CPPD nº 10/2021.
[2] Pesquisador do GPHM, Unesp campus Rio Claro. Professor do IFSP campus Bragança Paulista.

[A "NOT SO COMPLETE" KNOWLEDGE: ON AMOROSO COSTA'S NON-ARCHIMEDIAN STUDIES]

Abstract

This work addresses the studies on non-archimedean mathematics carried out by the Brazilian mathematician, engineer, and astronomer Manuel Amoroso Costa, who in 1928 held a series of conferences on this subject at the Faculté des Sciences in Paris, Sorbonne Université. Without being able to rely on the manuscripts of these conferences, which disappeared, other working documents from the author's personal archive were considered for this research, his publications, works by other authors, and historical studies on the subject studied by him, as well as articles and notes by newspapers of the time. As a result of the analysis of these sources, this work presents an overview of Amoroso Costa's non-archimedean studies, seeking to place them in his own time, and presents questions that he possibly addressed.

Keywords: Manuscripts of scientists, Digital historical archives, Geometry, Number, Continuity.

Introdução

No primeiro trimestre de 1928, uma série de quatro conferências sobre geometrias não-arquimedianas foram realizadas no anfiteatro Le Verrier da Faculté des Sciences de Paris, Sorbonne Université. O conferencista era o brasileiro Manuel Amoroso Costa (1885–1928), então professor da Escola Politécnica do Rio de Janeiro. Em agosto e setembro daquele ano,[3] Amoroso Costa faria conferências sobre o mesmo assunto no Brasil; em dezembro, quarenta dias antes de completar 44 anos, perderia a vida em um desastre aéreo. O propósito deste trabalho é elucidar aspectos histórico-matemáticos atinentes a essas palestras que quase um século depois da morte de seu autor ainda são pouco conhecidos.

A única publicação de Amoroso Costa relacionada ao assunto das conferências apareceu no início de 1929, no livro *As ideias fundamentais da matemática*, obra em cujos dezenove capítulos são apresentados os desenvolvimentos mais recentes da época em vários ramos da matemática, entre os quais as geometrias não-arquimedianas, que são abordadas, muito brevemente, no capítulo XVII. O livro começou a ser gestado anos antes de ser publicado (antes das palestras, portanto), assim não reflete com precisão o conhecimento que o autor possuía a respeito do tema quando tais palestras aconteceram. Uma análise pautada unicamente no livro, por esse motivo, não nos permite conhecer a extensão dos estudos não-arquimedianos de Amoroso Costa.

[3] As conferências estavam programadas todas para o mês de agosto, mas a última delas foi adiada para o início de setembro, conforme anuncia uma nota da edição de 02/09/1928 do Correio da Manhã.

Embora nada mais tenha publicado sobre o assunto, o arquivo pessoal de Amoroso Costa, pertencente ao Museu de Astronomia e Ciências Afins (MAST), contém algumas anotações suas e traduções que fez de outros autores a respeito do tema (dossiê AC.T.3.037), além de dois rascunhos do livro (dossiês AC.T.3.031 e AC.T.3.033). O que restou das conferências é um registro, de autoria desconhecida, dos tópicos que foram abordados pelo brasileiro na França. Esse documento compõe o dossiê AC.T.4.001 e menciona a existência de um manuscrito das palestras, que teria 55 folhas em francês e 18 em português. O manuscrito aludido, infelizmente, não se encontra no acervo do MAST; segundo Moreira (1995), ele desapareceu.

Se, por um lado, o sumiço do manuscrito que Amoroso Costa produziu para suas conferências impossibilitou saber com certeza o que foi abordado nelas, por outro lado, com o exame de pesquisas nas quais ele se baseou – identificadas nos manuscritos disponíveis – e a análise de outros documentos de trabalho seus, suplementados por informações coletadas em jornais da época, foi possível construir um mosaico de seus estudos sobre matemática não-arquimediana, reunindo e dando sentido, na medida do possível, a um trabalho que se nos apresenta fragmentado. Para tanto, optou-se por seguir o seguinte caminho: primeiro as palestras de Amoroso Costa são abordadas em seu contexto histórico, tendo em vista o que se publicou na época em relação a elas e à cooperação intelectual entre Brasil e França; em seguida são discutidos os vestígios de seus estudos considerando, primeiro, o livro de 1929 e seus rascunhos, e, finalmente, seus manuscritos sobre o tema, tendo por diretriz o programa das palestras contido no dossiê AC.T.4.001.

Os documentos de Amoroso Costa examinados para este trabalho são provenientes do acervo digital do Arquivo de História da Ciência do MAST (base de dados Zenith), que contém todo o conteúdo do arquivo físico desse autor. As hemerotecas digitais das Bibliotecas Nacionais de Brasil (BNDigital) e França (Gallica) forneceram os periódicos de época consultados.

Embora os cursos e textos produzidos por Amoroso Costa relacionados ao tema abordado no presente artigo sejam referidos por ele como “geometria não-arquimediana”, seus estudos nesse campo, como será mostrado, têm conexões com conceitos de outros ramos da matemática, por isso a utilização em alguns momentos da expressão mais abrangente “matemática não-arquimediana”.

Textos e trabalhos acadêmicos de caráter biográfico ou contendo dados biográficos de Amoroso Costa têm sido produzidos desde o seu falecimento (alguns deles compõem a bibliografia ao final deste artigo), por isso não me ocuparei desse aspecto, ainda que a explicação de alguns pontos da vida desse personagem seja, em conclusão, um produto do presente estudo.

Cooperação franco-brasileira

As conferências de Amoroso Costa em Paris foram resultado de circunstâncias político-institucionais que começaram a ser configuradas antes de seu nascimento. Talvez essas conferências não tivessem acontecido não fosse o intercâmbio acadêmico firmado entre Brasil e França quando da criação, em 1923, do Instituto Franco-Brasileiro de Alta Cultura

(IFBAC), o então mais novo instrumento da política de influência cultural que o país europeu exercia sobre o nosso desde o século anterior (SUPPO, 2000).

Do lado brasileiro, o acordo entre os dois países foi oficializado por meio do Decreto Federal nº 4.634, de 8 de janeiro de 1923, que concedia à então recém-criada Universidade do Rio de Janeiro[4] uma subvenção anual de 50 mil réis para a manutenção do Instituto, cuja administração ficaria a cargo do Reitor da Universidade. O decreto previa também uma contribuição pecuniária da parte do governo francês, nunca inferior à brasileira.[5]

O intercâmbio intelectual entre Brasil e França institucionalizado pelo IFBAC se daria na forma de permuta anual de professores, que realizariam cursos no país anfitrião.[6] Os cursos dados no Brasil, segundo o Decreto nº 4.634/1923, Art. 3º, teriam caráter de "pura especialização, não devendo se assemelhar aos cursos gerais da nossa Universidade" (BRASIL, 1923).

Por intermédio do IFBAC, muitos acadêmicos franceses, de diversas áreas, estiveram proferindo conferências sobre os mais variados temas no país nas décadas de 1920 e 1930, e um número muito menor de brasileiros foram à Paris. Somente nos três primeiros anos do acordo, o Brasil recebeu doze palestrantes, mas não enviou nenhum ao país parceiro. Examinando-se os jornais da época, o ano de 1926 é o primeiro no qual aparecem nomes de acadêmicos brasileiros realizando palestras sob os auspícios do IFBAC, a saber, os do médico Antônio Austregésilo R. Lima (1876–1960) e do engenheiro Tobias L. M. Moscoso (1879–1928). A partir daquele ano até o final da década de 1920, o número de dois professores foram permutados anualmente pelos dois países, assim, enquanto duas dezenas de conferencistas franceses desembarcaram em solo brasileiro no período, no máximo oito brasileiros viajaram para a Europa.[7]

O número anual de participantes do intercâmbio entre os dois países manteria-se praticamente constante na década seguinte, com predominância francesa em alguns momentos[8], assim o saldo final dessa colaboração foi um número muito maior de conferencistas chegando ao Brasil do que dele partindo. Chama atenção, de ambos os lados, a prevalência dos cursos das áreas de humanidades e medicina promovidos sob os auspícios do IFBAC; em particular, um único curso sobre matemática foi realizado nos dois países. O curso no Brasil ocorreu anos antes do de Amoroso Costa na França, sendo dado por Jacques Hadamard (1865–1963), que aqui esteve em 1924, substituindo o físico Paul Janet (1863–

[4] A Universidade fora instituída em 1920, pelo Decreto nº 14.343, de 7 de setembro de 1920, reunindo a Escola Politécnica, a Faculdade de Medicina e a Faculdade de Direito do Rio de Janeiro.

[5] O IFBAC não era a única instituição do gênero subsidiada pela França. No momento de sua criação, acordos semelhantes já haviam sido celebrados entre Paris e as capitais de outros países, inclusive Buenos Aires (BRASIL, 1923). No Brasil, em 1925, um segundo Instituto ainda viria a ser fundado, dessa vez em São Paulo: o Instituto Técnico Franco-Paulista.

[6] A experiência levaria a pactos similares de cooperação intelectual com outros países na década seguinte, com a criação dos Institutos Teuto-Brasileiro (1930), Ítalo-Brasileiro (1933) e Luso-Brasileiro (1933) de Alta Cultura, do Instituto Argentino Brasileiro de Cultura (1934) e do Instituto Brasil-Estados Unidos (1937).

[7] A palestra do jurista Rodrigo Otávio de L. Meneses (1866–1944) que estava prevista para acontecer em 1929 foi cancelada (*O Jornal*, 1929, p. 3). Como não foram encontradas informações sobre a ida de um substituto, é provável que apenas um brasileiro tenha participado do intercâmbio naquele ano.

[8] Nove conferencistas franceses do IFBAC são mencionados nos jornais do Rio de Janeiro no ano de 1936.

1937)[9]. Além de um curso sobre mecânica dos fluídos e uma palestra sobre cosmologia, Hadamard proferiu, na ocasião, quatro conferências sobre o desenvolvimento do conceito de função[10].

A designação de Amoroso Costa para o intercâmbio do ano de 1928 do IFBAC deve ter ocorrido no final de 1927, junto com a do médico Maurício C. de Madeiros (1885–1966). [11] Entre os documentos do dossiê AC.T.2.002, há uma carta com data de 10 de janeiro de 1928 do Reitor da Universidade do Rio de Janeiro, Manuel Cícero Peregrino da Silva (que assinou, simplesmente, "Manuel Cícero"), destinada a Amoroso Costa, comunicando-o da aceitação de seu nome pela Reitoria da Universidade de Paris. A indicação dos dois brasileiros foi divulgada pelos jornais franceses ainda naquele mês[12], que também noticiaram os cursos à época de sua realização[13]. Enquanto o curso de Medeiros, sobre patologias tropicais, ocorreria somente em maio, o de Amoroso Costa começou no dia 29 de fevereiro e prosseguiu nos dias 3, 7 e 10 de março (Figura 1).

Figura 1: Cópia do cartaz das conferências.

Fonte: Dossiê AC.T.3.039, base de dados Zenith/MAST.

[9] O próprio Hadamard forneceu essa informação ao jornal *A Noite*, que noticiou sua presença no Brasil na edição de 19/07/1924.
[10] O número de conferências foi deduzido de informações sobre o curso veiculadas por jornais da época. O programa das palestras de Hadamard, infelizmente, não foi encontrado.
[11] O *Correio da Manhã* de 25/12/1927 noticia a designação do nome de Maurício de Medeiros para o IFBAC com comentários nada elogiosos sobre tal escolha. A busca pelo nome do médico – que também era político – em outras edições, sugere que fosse alvo de críticas constantes do jornal.
[12] Por exemplo, na edição de 23/01/1928 do *Le Gaulois*.
[13] Em consulta a Gallica, foi encontrada uma nota sobre o curso de Amoroso Costa na edição de 29/02/1928 do *Journal des débats*, portanto do dia em que o curso começou, uma segunda nota no *Le Gaulois*, edição de 08/03/1928, e uma terceira no semanário *La Semaine à Paris*, do período de 02 a 09/03/1928. Neste, na mesma página em que é noticiado o curso do brasileiro, então já iniciado, há uma nota sobre dois cursos do Instituto de Altos Estudos Chineses (*Institut des Hautes-Etudes Chinoises*) que começariam naquela semana. Parece, pois, que cursos dos intercâmbios com a França, não só o brasileiro, aconteciam com frequência na capital francesa.

Tobias Moscoso – que morreu no mesmo acidente aéreo que Amoroso Costa –, assistiu às conferências. Segundo ele, em fala proferida durante uma reunião da Congregação da Escola Politécnica do Rio da Janeiro[14], o curso teve numerosa audiência e Jacques Hadamard esteve entre os ouvintes:

> “*Quero agora considerar [...] o desempenho dado por Amoroso Costa à missão de que o nosso Conselho Universitário o incumbiu, junto ao Instituto Franco-Brasileiro de Alta Cultura. Suas quatro conferências realizadas na Sorbonne sobre as geometrias não-arquimedianas e sua comunicação oral sobre o universo infinito, feita no Colégio de França, despertaram crescente atenção num auditório de escol, uma centena de ouvintes que lhe acompanhavam a exposição, tomando notas e consultando o mestre sapiente, uma vez terminada cada uma de suas preleções a que assistiam pontualmente professores notáveis, entre os quais os srs. Hadamard e Cartan.*” (MOSCOSO, 1928, p. 5)

A comunicação intitulada *L'universe infini. Quelques aspects du problème cosmologique,* mencionada nessa passagem, ocorreu no dia 23 de março, no seminário Hadamard,[15] e diz respeito ao universo descrito por Émile Borel (1871–1956) em uma nota que este publicara, em 1922, no *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*[16]. O assunto das palestras do IFBAC, prossegue Moscoso, era conhecido por poucos e sobre ele Amoroso Costa teria apresentado contribuição própria:

[14] Teria sido a primeira reunião da Congregação depois do retorno de Tobias Moscoso da Europa, segundo o jornal paulista *Diário Nacional*, que, em sua edição de 05/12/1928, publicou na íntegra, como uma homenagem a ambos, o conteúdo de sua fala sobre Amoroso Costa. O propósito de Moscoso em seu pronunciamento, segundo o jornal, era fazer um retrospecto “dos trabalhos publicados, das conferências proferidas e dos encargos especiais recebidos pelos membros do corpo docente” da Escola (MOSCOSO, 1928, p. 5).

[15] O seminário de matemática Hadamard, considerado o primeiro do gênero na França, era realizado no Collège de France, onde Jacques Hadamard era professor, e recebia pesquisadores do mundo todo. De acordo com Audin (2014), quando Hadamard criou seu próprio seminário, em 1913, os seminários, enquanto locais de aprendizado para cientistas e estudantes, já se encontravam difundidos em outros países, nos quais geralmente tinham um caráter especializado. Hadamard estendeu as atividades de seu seminário a todas as áreas da matemática.

[16] Na ocasião, Amoroso Costa teria fundido, em uma única apresentação, o conteúdo da nota de Émile Borel, suas próprias observações sobre o assunto – que também publicara como uma nota no *Comptes rendus* – e as de Theodoro A. Ramos (1895–1937). O último demonstrou, em uma nota publicada na *Revista da Academia Brasileira de Ciências*, em 1926, uma condição necessária e suficiente para que seja finito o potencial correspondente a uma distribuição de massas com os caracteres de quese periodicidade do exemplo dado por Borel. Theodoro A. Ramos também demonstrou em seu trabalho que, considerando uma série divergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{a_n}$, tal que $\lim_{n=\infty}\frac{2^n}{a_n}=0$, obtém-se uma distribuição em que é infinito o potencial e nula a densidade média. Foi esse caso utilizado por Amoroso Costa em sua palestra no seminário acima citado. Ele mostrou que o potencial P no ponto O, onde $P=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{d_n}$, pode ser infinito, mesmo que seja nula a densidade média $\lim_{n=\infty}\frac{n}{d_n}$. Então Émile Borel incorporou em seu trabalho este resultado obtido por Amoroso Costa. Supõe-se que foi em função desse trabalho, que Émile Borel tenha sugerido a J. Hadamard que convidasse Amoroso Costa para fazer uma conferência em seu seminário no Collège de France. Para detalhes, ver Silva (2022, p. 56–57).

> "*Foi-me dada a satisfação de presenciar o êxito do nosso eminente colega naquele meio de elevada cultura onde ele, discorrendo em francês lídimo sobre matéria deveras sútil e entre pouca gente difundida,* ***apresentou, a respeito, contribuição sua****, de cujo valor ouvi os dois cientistas fazerem uma apreciação de elogio simples que importa a melhor aprovação nesse terreno sério onde se debatem, por amor à verdade, questões de natureza tão austera.*" (MOSCOSO, 1928, p. 5, grifo meu)

Infelizmente, Moscoso nada diz sobre a natureza da suposta contribuição dada por Amoroso Costa ou da apreciação que fizeram Hadamard e Cartan a respeito dela. Na verdade, também não está claro na passagem acima se tal contribuição se deu em relação ao tema das geometrias não-arquimedianas ou ao do da comunicação que ele realizou dias depois no seminário Hadamard. Um fragmento posterior do discurso de T. Moscoso sugere que este estivesse se referindo às palestras da Sorbonne:

> "[...] *Amoroso Costa se revela exímio, como mestre com quem se adquire fácil iniciação em conhecimentos superiores e difíceis, como os que* ***versaram Riemann****,* ***Lobatchevsky****,* ***Hilbert****,* ***Veronese****, conhecimentos que, por outro caminho, só mediante longa rebusca em vultosa bibliografia se poderiam alcançar, e não de modo tão completo, pois que, pelo menos, faltaria ao estudioso* ***a contribuição original trazida por Amoroso Costa****.*" (MOSCOSO, 1928, p. 5, grifos meus)

É provável, na verdade, que Tobias Moscoso fizesse parte do público que desconhecia por completo (ou quase) o assunto, que, segundo o próprio Amoroso Costa, também se encontrava pouco difundido na França. "Minha temeridade não foi tão grande como a princípio eu supunha. O assunto era muito pouco conhecido e o meu curso despertou bastante interesse" [17], teria escrito sobre o curso de geometrias não-arquimedianas a Theodoro Ramos (1933, p. 23).

A repercussão das palestras na Sorbonne teria sido positiva, ao menos é o que dizem pessoas próximas a Amoroso Costa. É o caso, além de Tobias Moscoso, do fisiologista Miguel Ozório de Almeida (1890–1953), que participara do intercâmbio do IFBAC no ano anterior: "por ocasião de seu curso, realizado como professor do Instituto Franco-Brasileiro de Alta Cultura, em Paris, muitas foram as cartas de professores da Universidade por mim recebidas a me falarem da profunda impressão por ele deixada" (ALMEIDA, 1931, p. 55). Ainda em Paris, Amoroso Costa recebeu convite do presidente da Société Mathématique de France (SMF),[18] Alexandre L. Thybaut (1870–1958), para realizar comunicação em uma das reuniões da sociedade, mas tal comunicação nunca ocorreu.[19] Também na França, recebeu

[17] Curiosamente, uma das primeiras referências (senão a primeira) que Amoroso Costa consultou sobre o assunto, como veremos, é francesa.
[18] Audin (2014) explica que era comum que pesquisadores estrangeiros de passagem por Paris fossem convidados ao séminaire Hadamard e à Société.
[19] Nos *comptes rendus* das sessões da SMF do ano de 1928 não há menção ao brasileiro.

uma carta do matemático Paul Jean J. Barbarin (1855–1931), que, não tendo acompanhado o curso do IFBAC, lhe pergunta se as conferências seriam publicadas.[20]

Amoroso Costa retornou ao Brasil no início de junho.[21] Como seria de praxe entre os acadêmicos ligados à Academia Brasileira de Ciências[22], realizou no país um curso sobre o mesmo tema, também em quatro lições, que começou no dia 9 de agosto e terminou em 3 de setembro. O programa do curso consistia dos seguintes temas: i) o postulado de Arquimedes, ii) as grandezas não-arquimedianas, iii) construção dos espaços não-arquimedianos e iv) alguns teoremas.[23] De acordo com Tobias Moscoso, no discurso citado acima, o curso da ABE teria sido uma repetição, com poucas variações, do curso do IFBAC, de cujo programa falarei mais adiante.

Ideias fundamentais da matemática

É possível que o primeiro contato de Amoroso Costa com o tema das palestras do IFBAC tenha acontecido no período de produção de seu segundo livro. Seu interesse pelos fundamentos da geometria, de acordo com Theodoro Ramos (1933, p. 22), remonta aos primeiros anos da década em que o intercâmbio franco-brasileiro começou: "de 1922 em diante ocupou-se Amoroso Costa quase que exclusivamente com o estudo dos fundamentos das Matemáticas, e em particular da Geometria", diz o ex-aluno. Se os eventos sucederam dessa forma, então 1922 não foi, para Amoroso Costa, um ano exclusivamente "dedicado" à teoria da relatividade.

Naquele ano, após retornar de um período de estudos na Europa[24], Amoroso Costa realizou um curso, e publicou alguns artigos e um livro sobre a teoria da relatividade[25]. Deve ter sido o estudo dessa matéria que despertou o seu interesse pelas geometrias não-euclidianas, que são tema de um dos capítulos de seu primeiro livro e voltariam a ser abordadas por ele em *As ideias fundamentais da matemática*. Como veremos a seguir, uma das referências por ele utilizadas para a discussão do assunto nessa obra também serviu de base para a parte em que são tratadas as geometrias não-arquimedianas. Assim, parece que um tema o conduziu a outro, e "o pendor filosófico de seu pensamento e a fascinação de seu espírito pelas formas transcendentes da beleza interior", escreveu Lélio Gama (1971, p. 34),

[20] As cartas de Thybaut e Barbarin encontram-se entre os documentos do dossiê AC.T.3.039.

[21] Segundo nota publicada na primeira página da edição de 03/06/1928 do *Correio da Manhã*, a respeito de uma reunião do Conselho Universitário da Universidade do Rio de Janeiro, em que se menciona o êxito alcançado por Amoroso Costa em suas conferências, ele estaria chegando ao Brasil no dia 4 de junho.

[22] Miguel Ozório de Almeida, por exemplo, realizara no ano anterior, sob os auspícios da Associação Brasileira de Educação, uma série de conferências sobre o tema de seu curso na França (*Correio da Manhã*, 11/11/1927, p. 3), e Alberto Betim Paes Leme (1882–1938) seguiria o mesmo caminho em 1929 (*Jornal do Brasil*, 21/08/1929, p. 14).

[23] Divulgado na edição de 07/08/1928, p. 7, de *O Paiz*.

[24] Nesse período Amoroso Costa assistiu a três cursos na Faculdade de Letras de Paris, cujas notas das aulas permanecem em seu arquivo pessoal (dossiê AC.T.3.013). A data de seu retorno ao Brasil é desconhecida, mas deve ter ocorrido no final de 1921 ou no início do ano seguinte.

[25] Seu curso sobre a teoria da relatividade, em quatro conferências, foi realizado em abril e maio (COSTA, 1995), e o livro *Introdução à teoria da relatividade* apareceu em outubro (*A Noite*, ano 12, n. 3.910). Os artigos sobre o tema que produziu, voltados ao não especialista, foram publicados em *O Jornal*, o primeiro *À margem da teoria de Einstein*, em duas partes, em março e abril, e o segundo, *Bergson e a relatividade*, em outubro (COSTA, 1971).

"levaram-no finalmente a explorar o domínio das geometrias denominadas não-arquimedianas".

Não se sabe quando o projeto do novo livro começou a ser desenhado, mas o fato é que em agosto de 1924 Amoroso Costa obteria uma nova licença do posto de professor na Escola Politécnica e viajaria ao continente europeu, onde permaneceria até fevereiro de 1926.[26] No Brasil, em junho e julho desse ano, realizaria, com o apoio da Associação Brasileira de Educação (ABE), o curso *As ideias fundamentais da matemática*.[27] No ano seguinte, o livro homônimo começaria a ser anunciado[28]. Não foram encontradas informações a respeito dos estudos feitos pelo brasileiro em sua segunda estadia na Europa, mas é provável que estivesse realizando pesquisas para o livro[29].

Amoroso Costa dividiu a exposição sobre geometria de seu livro em dois capítulos.[30] O primeiro deles é o XVI, intitulado *Os princípios da geometria euclidiana*, no qual ele apresenta um sistema axiomático elaborado pelo matemático estadunidense Oswald Veblen (1880–1960). O décimo quarto axioma de Veblen, sobre o qual retornarei neste trabalho, enuncia a propriedade arquimediana da reta, sendo a primeira formulação do postulado de Arquimedes apresentada no livro. A exposição sobre geometria não-arquimediana ocupa as duas últimas seções do capítulo seguinte, cujo título é *Geometrias não-euclidianas e não-arquimedianas*.

Diferente do capítulo XVI, em que uma nota de rodapé informa que a referência na qual este se baseia é um texto sobre geometria de Veblen (1924), todas as indicações de trabalhos que Amoroso Costa consultou para escrever o capítulo XVII contidas nos rascunhos da primeira versão do livro foram apagadas na publicação[31]. Uma referência abreviada por "Encycl. III 1" aparece com bastante frequência ao longo do manuscrito do capítulo XVII, sendo a única registrada na primeira das duas seções sobre geometria não-arquimediana do livro[32].

A abreviatura "Encycl. III 1" refere-se a *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, tomo III, volume 1 (doravante *Encyclopédie*, simplesmente). Editada por Jules Molk (1857–1914), tal obra baseava-se na *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, que contava com a contribuição de matemáticos de diferentes nacionalidades. Publicada entre 1904 e 1916, a primeira era mais do que uma simples tradução da segunda, apresentando de forma mais extensa alguns dos temas nesta abordados. Para seu livro, Amoroso Costa baseou-se nos dois primeiros trabalhos

[26] Sua partida para o Brasil é noticiada na edição de 13/02/1926 do *The Paris Times*.
[27] Sob os auspícios da ABE vários cursos do gênero eram realizados na então capital federal. Os cursos *A constituição geológica do Brasil*, de Euzebio de Oliveira (1883–1939), *A estrutura geopolítica do Brasil*, de Everardo Backheuser (1879–1951), *Antropologia*, de Roquette Pinto (1884–1954), e *Estudo teórico e prático das bombas centrífugas*, de Mauricio Joppert (1890–1985), foram anunciados à mesma época que o de Amoroso Costa, que ainda faria os cursos *As geometrias não-euclidianas* e *As geometrias não-arquimedianas*, também promovidos pela ABE, no biênio seguinte.
[28] O anúncio mais antigo do livro encontrado entre os jornais da época é da edição de 21/05/1927 de *O Malho*, quando então ele ainda estava no prelo.
[29] As razões para essa suspeita são apresentadas em Gomes (2024).
[30] Originalmente, o livro conteria três capítulos sobre o assunto.
[31] Tais indicações, na verdade, sequer encontram-se no segundo rascunho do livro.
[32] Na primeira versão, o capítulo XVII seria divido em três seções. As duas primeiras foram fundidas em uma só, que corresponde à seção 90 do livro.

daquele volume, a saber, *Principes de la geométrie*, do italiano Federigo Enriques (1871–1946), e *Notes sur la géométrie non-archimédienne*, de Arthur M. Schoenflies (1853–1928), que não compunha a edição alemã. A monografia de Enriques está dividida nas mesmas oito partes (incluindo uma introdução) da versão que escreveu originalmente para a *Encyklopädie*, dedicando: (B) a última dessas partes às geometrias não-arquimedianas e (A) uma seção ainda na segunda parte (*Questions d'ordre élémentaire*) ao postulado de Arquimedes. (C) A nota de Schoenflies, por sua vez, é uma espécie de adendo ao texto de Enriques[33], resumindo um artigo de autoria do próprio Schoenflies, que este publicou em 1906 no *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. Nesse artigo – que, inclusive, será utilizado por Amoroso Costa nas palestras do IFBAC –, há uma comparação entre as concepções de continuidade de Richard Dedekind (1831–1916) e de Giuseppe Veronese (1854–1917) que foi resumida por Enriques em sua monografia (em A).

A primeira seção sobre geometria não-arquimediana das duas que Amoroso Costa inseriu em seu livro é, essencialmente, um resumo (bastante conciso) dos dois trabalhos acima, em que ele conecta os conteúdos das partes A, B e C da *Encyclopédie*. A referida seção inicia definindo uma geometria não-arquimediana como aquela construída sobre a negação do postulado de Arquimedes, podendo ser este expresso da forma seguinte: "dados dois segmentos, existe um múltiplo do menor, que é superior ao maior" (COSTA, 1929, p. 211). Amoroso Costa observa em seguida que o reconhecimento da propriedade que o postulado exprime é anterior a Arquimedes: "convém notar que esta proposição não é de Arquimedes e já se encontra em geometrias anteriores. A sua denominação atual foi proposta por Stolz (1881)". No rascunho mais antigo do livro, há uma observação indicando que a fonte dessa informação está na página 25, nota 131, da *Encyclopédie* (Figura 2), que a situa na parte A.

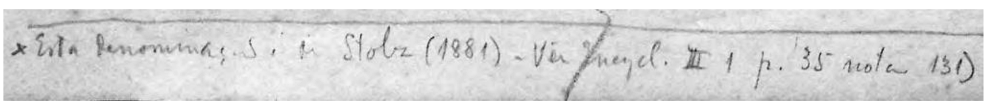


Figura 2: Indicação da origem da informação apresentada no livro.

Fonte: Dossiê AC.T.3.031, p. 263,[34] base de dados Zenith/MAST.

A nota (de Enriques) de fato contém a informação de que foi Otto Stolz (1842–1905) quem propôs a nomenclatura "postulado de Arquimedes". Ele teria feito isso, segundo a nota, em um trabalho publicado no biênio 1881–82 no *Berichte des naturwissenschaftlichen-medizinischen Verein Innsbruck*. O título do trabalho não é apresentado, mas trata-se do artigo *Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes* (*Sobre a geometria dos antigos, em particular sobre um axioma de Arquimedes*). Esse artigo, assim como qualquer outro trabalho de Stolz, não está entre as referências utilizadas por Amoroso Costa quando da elaboração da primeira versão de seu livro, embora, como será visto adiante, ele seja um dos autores abordados no curso do IFBAC.

[33] O texto de Enriques recebe a numeração III-1 no sumário da *Encyclopédie* enquanto o de Schoenflies, III-1a.
[34] Como os manuscritos consultados são, na verdade, digitalizações dos originais, serão indicadas as páginas do documento digital, não as folhas do dossiê físico, em que estão localizados os trechos aqui reproduzidos.

Retornando ao texto de Amoroso Costa, este explica que, enquanto a existência de uma correspondência unívoca entre segmentos e números reais é garantida pelo postulado de Arquimedes, a univocidade da relação inversa é estabelecida por outro princípio:

> "*A todo o segmento corresponde* [...]*, univocamente, um número real, e a reciprocidade dessa correspondência é afirmada, como já vimos, por um postulado como o de Cantor-Dedekind. O conjunto desse postulado e do de Arquimedes exprime a representação cartesiana da grandeza linear.*" (COSTA, 1929, p. 211)

A última afirmação nessa passagem é estranha. O postulado de Arquimedes é uma consequência do de Cantor-Dedekind, que garante sozinho a propriedade aludida. Dizer que o conjunto dos dois axiomas exprime a representação cartesiana da reta é, portanto, uma redundância. O que diz Enriques no texto que Amoroso Costa tinha em mãos difere totalmente do que este registrou acima: "nosso conceito de continuidade contém tanto o postulado de Arquimedes quanto o que deve ser adicionado a ele para que qualquer número real de fato corresponda a um segmento medido por esse número", (ENRIQUES, 1991, p. 36). Por **nosso conceito de continuidade** Enriques refere-se à concepção de continuidade compreendida pelas definições fornecidas (independentemente) por Karl Weierstrass (1815–1897) e por R. Dedekind, que ele denomina continuidade de Dedekind-Weierstrass. Curiosamente, ele atribui a Georg Cantor (1845–1918) uma formulação equivalente à de Veronese – que é mais fraca do que a daqueles dois –, quando Cantor, na verdade, chegou a uma definição de continuidade equivalente à de Dedekind-Weierstrass. Não por acaso, o axioma da continuidade (no sentido colocado por Enriques) era conhecido na época por axioma de Cantor-Dedekind[35]. Assim, Amoroso Costa expressou-se de forma duplamente apropriada ao dizer "por **um postulado como** o de Cantor-Dedekind". Duplamente porque, além do uso da denominação já então consagrada, ele deixa claro que a correspondência (biunívoca) entre segmentos e números reais pode ser estabelecida por qualquer axioma equivalente ao de Cantor-Dedekind.

Talvez por influência de Enriques, o axioma da continuidade de Veronese, que abordarei adiante, será chamado mais tarde de "postulado de Cantor-Veronese" por Amoroso Costa. Por pretender exprimir uma noção mais ampla de continuidade do que a expressa pelo axioma de Cantor-Dedekind, a proposição de Veronese está contida neste, assim como a de Arquimedes. Por isso, a afirmação de Enriques:

> "*Acrescentando este postulado ao postulado de Arquimedes, pode-se inverter a correspondência entre segmentos e números que resulta da medição dos segmentos e chega-se assim ao teorema fundamental segundo o qual qualquer número real (tanto irracional como racional) corresponde a um segmento do qual é a medida.*

[35] Essa nomenclatura, apenas para dar um exemplo, já é empregada por Grace e William Young em 1906, no livro *The theory of point sets*.

> *Podemos então dizer que a combinação dos dois postulados de Arquimedes e de Cantor[-Veronese] fornece a representação cartesiana dos pontos da reta.*" (ENRIQUES, 1991, p. 37)

Nessa parte da *Encyclopédie* (A), a noção de continuidade de Veronese é abordada sem considerações sobre as consequências da natureza não-arquimediana dessa noção, que aparecem somente em B. Aqui, Enriques chama atenção para a íntima conexão que há entre o postulado de Arquimedes e quantidades infinitesimais:

> "*A questão do postulado arquimediano está ligada àquela da existência de grandezas infinitamente pequenas (ou infinitamente grandes) atuais, que surgiu desde a fundação da análise infinitesimal. Negar o postulado de Arquimedes equivale, na verdade, a admitir a possibilidade de conceber um segmento infinito atual ou infinitamente pequeno atual em relação à unidade de medida adotada e, consequentemente, a possibilidade de conceber um número infinito atual ou infinitamente pequeno.*" (ENRIQUES, 1991, p. 136).

E Amoroso Costa seguindo de perto o texto do italiano, faz observação análoga no próprio livro:

> "*Resulta do postulado de Archimedes a não-existência de um segmento infinitamente pequeno atual, isto é, constante e inferior a qualquer segmento dado. A existência de tal segmento será, ao contrário, característica de todo o sistema não-arquimediano, implicando, por sua vez, a existência de um número infinitamente pequeno atual.*" (COSTA, 1929, p. 211).

Os estudos que conduziram Veronese à introdução de números não-arquimedianos (infinitamente pequenos e grandes) são mencionados por Enriques, que não fornece nenhuma informação a respeito desses números. Nesse ponto, Amoroso Costa se aproxima da nota de Schoenflies (parte C), referida nos rascunhos por "Encycl. III 1a" (Figura 3), ao explicar que o tipo mais simples desses números é obtido pela introdução de uma unidade transfinitamente pequena η que, para qualquer número finito n, satisfaz a condição $n\eta < 1$, contrária ao postulado de Arquimedes[36]. Os números da forma $a + b\eta$, em que a e b são números reais, prossegue, representam então uma nova classe de números, que estão em correspondência com os pontos de uma reta que contém, "além dos pontos da reta arquimediana, outros pontos intermediários, em número infinito, o que equivale a conceber o espaço não-arquimediano como um contínuo de um tipo mais complexo que o habitual" (COSTA, 1929, p. 212).

[36] Ou seja, não há um múltiplo de η que supere 1.

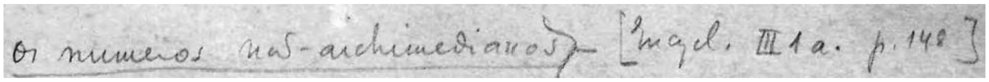

Os numeros não-archimedianos [Encycl. III 1a. p.148]

Figura 3: Anotação na parte superior de uma das folhas do primeiro rascunho do livro, fazendo referência à página 148 da *Encyclopédie* (primeira página do texto de Schoenflies).

Fonte: Dossiê AC.T.3.031, p. 264, base de dados Zenith/MAST.

Após apresentação dos números do tipo $a + b\eta$, Schoenflies comenta, resumidamente, as propriedades (suficientes) que os coeficientes desses números e suas generalizações devem possuir para que tais números sejam contínuos no sentido de Veronese, caminho que Amoroso Costa preferiu não seguir em seu livro. No lugar de entrar em maiores detalhes a respeito desses números – o que se justifica, considerando o propósito de seu livro –, Amoroso Costa optou por assinalar a sua semelhança com números de um outro tipo:

> "*É patente a analogia com o modo de definição dos complexos.*[37] *Os números de Veronese conservam as propriedades formais das operações sobre os números ordinários, e nada impede de imaginar novas extensões, análogas à dos complexos superiores, pela introdução de um número qualquer de unidades.*" (COSTA, 1929, p. 212)

As unidades as quais ele refere nesse fragmento são os números η infinitamente pequenos de Veronese de diferentes ordens. Se η é um número com a propriedade de que $n\eta < 1$, para todo n natural, assumindo que as propriedades algébricas de corpo ordenado se apliquem aos novos números, tem-se $n\eta^2 < \eta$, para todo n, o que significa que η^2 é infinitamente pequeno em relação à unidade transfinita η, assim como, de modo geral, η^μ o será relativamente a $\eta^{\mu-1}$, sendo μ um inteiro positivo. Chega-se, desse modo, aos números da forma $a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + \cdots + a_n\eta^\mu$, com qualquer número μ de unidades.

Amoroso Costa conclui a primeira seção sobre matemática não-arquimediana de seu livro com uma síntese de alguns resultados sobre o tema expostos na parte B da *Encyclopédie* (que também são uma síntese). Ele apenas menciona que: (i) os trabalhos de Veronese sobre números não-arquimedianos foram generalizados por Tullio Levi Civita (1873–1941) e por David Hilbert (1862–1943) – o primeiro, através dos números "monosêmios"[38], e o último, por meio dos números funcionais[39] –, (ii) os números de Hilbert são pontos de um espaço euclidiano não-arquimediano e (iii) é possível construir sistemas geométricos não-euclidianos não-arquimedianos – citando a geometria lobachevskiana não-arquimediana de Dehn, Schur e Hilbert. [40]

Na segunda seção (e última do capítulo XVII), ele pretendia falar sobre ângulos corniformes, tema abordado por Felix Klein (1849–1925) no segundo volume de

[37] A mesma analogia é feita por Veronese (1891, p. xxvi): "Nossos números infinitos e infinitesimais são basicamente números complexos especiais com unidades infinitas".
[38] A palavra é um aportuguesamento de "*monosemii*" de T. Levi Civita (1892/1893).
[39] A expressão "*nombres fonctionnels de D. Hilbert*" é usada por Enriques (1991, p. 143).
[40] As geometrias não euclidianas, em particular a de Lobachevsky, são abordadas no mesmo capítulo, em seções anteriores, assim esse final, embora lacônico, estabelece uma conexão com partes anteriores no texto.

Elementarmathematik vom höheren Standpunkte (*Matemática elementar de um ponto de vista superior*)[41]. "Eis aqui um sistema geométrico sugerido por F. Klein e que não satisfaz o postulado de Arquimedes" (AC.T.3.033, p. 278), escreveu no segundo rascunho do livro. O título da seção, *Um exemplo de grandezas não-arquimedianas*, permaneceu, mas Amoroso Costa decidiu fornecer um exemplo diferente do que está em seus manuscritos. É provável que essa decisão tenha sido tomada depois que seus estudos sobre matemática não-arquimediana avançaram, talvez enquanto o livro ainda estivesse no prelo. Este, recordemos, começou a ser anunciado no final do primeiro semestre de 1927, mas só foi publicado no início de 1929, ou seja, mais de um ano e meio depois. Nesse meio tempo, Amoroso Costa realizou, em julho e agosto de 1927, um curso sobre geometrias não-euclidianas na ABE, e, no início de 1928, seu nome foi aceito para ministrar o curso do IFBAC. Os ângulos corniformes de Klein compõem o programa desse curso, assim como o exemplo que ficou no lugar deles no livro.

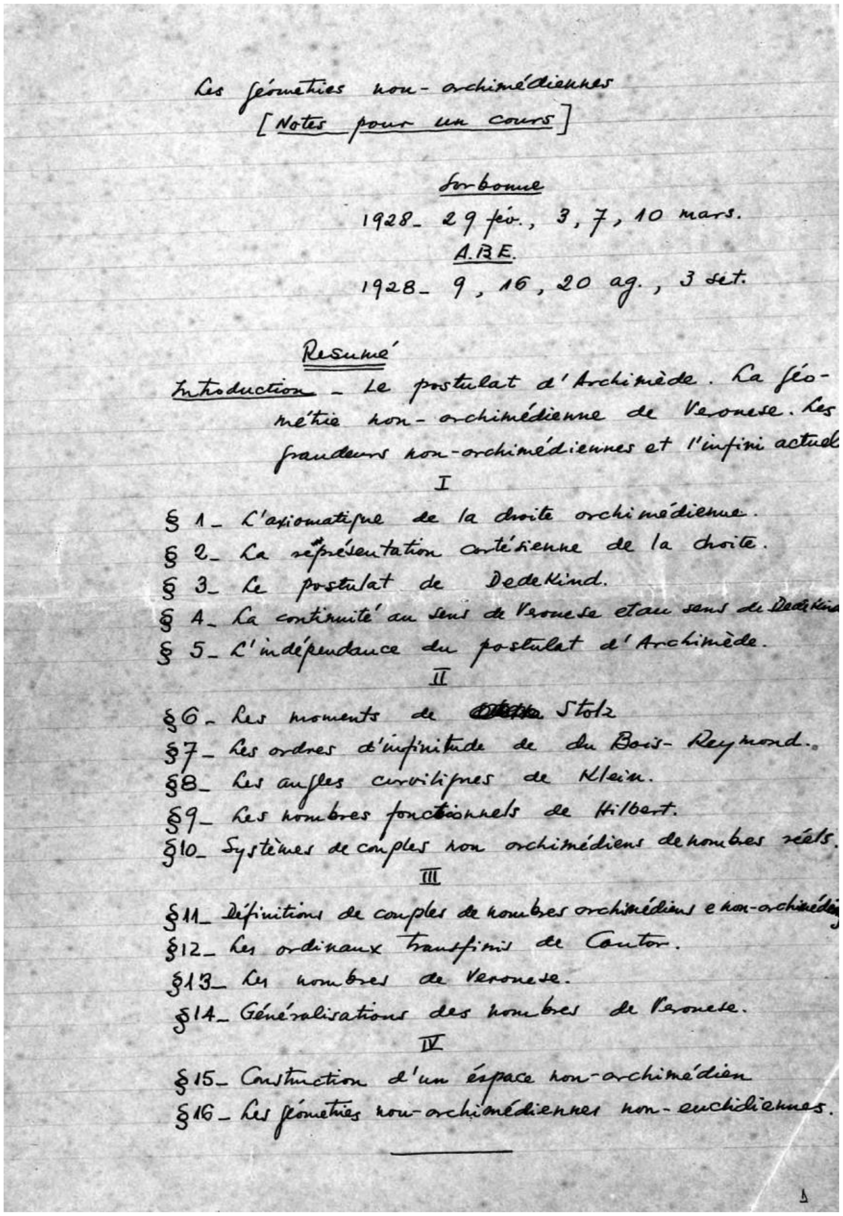
Os temas discutidos na Sorbonne

O primeiro documento do dossiê AC.T.4.001 (referido por AC.T.4.001_d01, doravante), já mencionado na introdução a este trabalho, é um meta-manuscrito do Arquivo Amoroso Costa. Não se sabe quem o produziu, apenas que deve ser anterior à doação do acervo pessoal do matemático ao MAST[42], uma vez que alguns dos documentos nele mencionados não estão no arquivo do museu. Na primeira de suas quatro páginas está registrado, em francês, o programa do curso do IFBAC (Figura 4) – certamente copiado das notas que o próprio Amoroso Costa produziu para as conferências[43] –, a segunda página contém, assim parece, um fragmento da introdução para o curso (também em francês) e nas duas últimas páginas estão: (i) informações a respeito dos manuscritos das palestras, (ii) a relação de manuscritos que compõem o primeiro rascunho do livro *As ideias fundamentais da matemática* e (iii) uma observação a respeito do resumo do curso sobre geometrias não-euclidianas de 1927.[44] Dos três documentos aludidos, ii é o único que permanece no arquivo do MAST.

De acordo com AC.T.4.001_d01, dezesseis temas, distribuídos em quatro grupos – o que sugere que cada grupo fosse objeto de uma conferência/lição – teriam sido discutidos por Amoroso Costa. Constituem o primeiro grupo: 1) a axiomática da reta arquimediana, 2) a representação cartesiana da reta, 3) o postulado de Dedekind, 4) a continuidade no sentido de Veronese e no sentido de Dedekind e 5) a independência do postulado de Arquimedes. No segundo grupo, temos: 6) os momentos [de funções] de Stolz, 7) as ordens de infinitude de du Bois-Reymond, 8) os ângulos curvilíneos de Klein, 9) os números funcionais de Hilbert e 10) sistemas de pares não- arquimedianos de números reais. No terceiro grupo encontram-

[41] O tema também é discutido por Enriques, que os denomina "ângulos de contingência" (*angle de contingence*).
[42] De acordo com o inventário sumário (MUSEU DE ASTRONOMIA E CIÊNCIAS AFINS), o arquivo de Amoroso Costa foi doado por Beatriz Amoroso Costa, sua filha, e organizado pelo museu no biênio 1993–1994.
[43] Segundo Arthur Gerhardt Santos (1928–), em seu artigo para a segunda edição de *As ideias fundamentais da matemática* (1971), os manuscritos das palestras encontravam-se, à época em que o escreveu, no acervo da família Amoroso Costa.
[44] Recentemente, em Fabris e Guimarães (2024), Arthur G. Santos revela que, quando os consultou, os documentos de Amoroso Costa estavam em posse de dona Zaira, viúva deste. Dessa vez, não menciona os manuscritos das palestras na Sorbonne, apenas diz que havia no arquivo algumas folhas manuscritas referentes ao curso sobre geometrias não euclidianas.

se: 11) definições de pares de números arquimedianos e não-arquimedianos, 12) os ordinais transfinitos de Cantor, 13) os números de Veronese e 14) generalizações dos números de Veronese. Os temas 15) construção de um espaço não-arquimediano e 16) as geometrias não-arquimedianas não-euclidianas são abordados por último. Entre esses tópicos, 1, 5, 8, 9 e 10 são aqueles que possuem correspondência direta com manuscritos do dossiê AC.T.3.037, que contém anotações de próprio punho de Amoroso Costa sobre matemática não-arquimediana e traduções de trabalhos sobre o mesmo assunto de outros autores. Com essas informações em mãos, é possível ter uma ideia geral de alguns dos conteúdos que Amoroso Costa apresentou nas três primeiras conferências de seu curso. Infelizmente, sobre os tópicos 15 e 16, não há absolutamente nada em seu arquivo e, por esse motivo, não serão abordados neste trabalho.



Les géométries non-archimédiennes
[Notes pour un cours]

Sorbonne
1928 – 29 fév., 3, 7, 10 mars.
A.B.E.
1928 – 9, 16, 20 ag., 3 set.

Résumé

Introduction – Le postulat d'Archimède. La géométrie non-archimédienne de Veronese. Les grandeurs non-archimédiennes et l'infini actuel

I

§ 1 – L'axiomatique de la droite archimédienne.
§ 2 – La représentation cartésienne de la droite.
§ 3 – Le postulat de Dedekind.
§ 4 – La continuité au sens de Veronese et au sens de Dedekind
§ 5 – L'indépendance du postulat d'Archimède.

II

§ 6 – Les moments de Stolz
§ 7 – Les ordres d'infinitude de du Bois-Reymond.
§ 8 – Les angles curvilignes de Klein.
§ 9 – Les nombres fonctionnels de Hilbert.
§ 10 – Systèmes de couples non archimédiens de nombres réels.

III

§ 11 – Définitions de couples de nombres archimédiens e non-archiméd
§ 12 – Les ordinaux transfinis de Cantor.
§ 13 – Les nombres de Veronese.
§ 14 – Généralisations des nombres de Veronese.

IV

§ 15 – Construction d'un espace non-archimédien
§ 16 – Les géométries non-archimédiennes non-euclidiennes.

Figura 4: Página do documento AC.T.4.001_d01, onde foi copiado o programa das conferências de Amoroso Costa.

Fonte: Dossiê AC.T.4.001, base de dados Zenith/MAST.

Reta não-arquimediana

Relacionado ao tópico 1, a axiomática da reta arquimediana, encontra-se no dossiê AC.T.3.037 três folhas ao longo das quais são apresentados treze axiomas (grifos do autor):

I. *Existem pelo menos dois* ***pontos****.*
II. *Existem dois* ***sentidos****, e apenas dois.*
III. *Dois pontos A, B determinam os dois sentidos (opostos) (AB) e (BA).*
IV. *Se A e B são pontos, existe pelo menos um ponto X tal que (AX) e (XB) são idênticos. (notação $(AX) = (XB)$) (definições: X está* ***entre*** *A e B; A, X, B estão na* ***ordem*** *AXB)*
V. *Se A e B são pontos, existe pelo menos um ponto Y (Y está à* ***direita*** *(ou à* ***esquerda****) de A e B) tal que (AB) e (BY) são idênticos. (isto é, B está entre A e Y. De IV e V resulta que existe uma infinidade, pelo menos enumerável, de pontos; def.: o conjunto dos pontos como X e de A e B se chama o* ***segmento*** *$\overline{AB}$.)*
VI. *Se A, B, C, D, E, F são pontos tais que $(AB) = (CD)$ e $(CD) = (EF)$, então $(AB) = (EF)$.*
VII. *Se A, B, C são pontos tais que $(AB) = (BC)$, então $(AB) = (AC)$ (o que exclui a ordem* ***cíclica****)*
VIII. *Se A, B, C são pontos distintos, então existe um ponto D, e um único, tal que o segmento $\overline{AB}$ é* ***congruente*** *ao segmento $\overline{CD}$, com $(AB) = (CD)$. (Not. de congruência $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$)*
IX. *$\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{BA}$.*
X. *Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$*
XI. *Se A, B, C, A', B', C' são pontos tais que B está entre A e C e B' entre A' e C', e se além disso $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, então $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.*
XII. *Se 1) A, B, C são pontos tais que $(AB) = (BC)$; 2) $B_1, B_2, \ldots$ são pontos tais que: $(AB) = (BB_1), (AB_1) = (B_1B_2), \ldots$ e, além disso, $\overline{AB} \equiv \overline{BB_1} \equiv \overline{B_1B_2} \equiv \cdots$, então só há um número finito dos pontos $B_1, B_2, \ldots$ entre A e C. (Postulado de Arquimedes)*
XIII. *Se se consideram, entre dois pontos O e O': 1) uma sequência ilimitada de pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ tais que $(OO') = (OA_1) = (A_1A_2) = (A_2A_3), \ldots$; 2) uma sequência ilimitada de pontos $A_1', A_2', A_3', \ldots$ tais que $(O'O) = (O'A_1') = (A_1'A_2') = (A_2'A_3'), \ldots$; e se, além disso, essas sequências são tais que os segmentos $\overline{A_1A_1'}, \overline{A_2A_2'}, \overline{A_3A_3'}, \ldots, \overline{A_nA_n'}, \ldots$ decresçam indefinidamente de modo a que, a partir de um certo valor de n o segmento $\overline{A_nA_n'}$ se torne e conserve inferior a um segmento arbitrariamente fixado, tão pequeno quanto se queira – então existe um ponto X, situado entre O e O' e tal que os pontos da primeira sequência estão todos entre O e X, e todos os da segunda sequência entre X e O'. (Postulado de Cantor-Veronese)*

Uma anotação na porção superior direita do manuscrito (Figura 5) faz menção ao livro *Les fondements de mathématique*, de Ferdinand Gonseth (1890–1975). Publicado em 1926, esse livro é um estudo geral dos fundamentos da matemática, que se originou de uma série de palestras que o autor realizara sobre o tema dois anos antes. Como parte das reflexões a respeito do método axiomático que ocupam o capítulo II – e que tomam como ponto de partida o sistema de axiomas para a geometria proposto por Hilbert –, Gonseth apresenta uma discussão sobre o segundo grupo de axiomas hilbertiano, que torna possível a ordenação dos pontos sobre uma reta (também sobre um plano e no espaço) a partir da noção "estar entre".

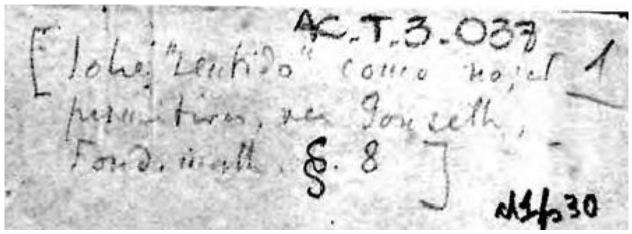


Figura 5: Anotação na primeira folha do manuscrito que diz: "sobre 'sentido' como noção primitiva ver Gonseth, Fond. math., §. 8"

Fonte: Dossiê AC.T.3.037, base de dados Zenith/MAST.

Para mostrar que um domínio de objetos pode ser descrito por dois sistemas axiomáticos distintos, Gonseth (1974, p. 26–29) propõe então um conjunto de axiomas para uma noção diferente da definida por aquele grupo:

G1) *A ordem de sucessão de dois pontos A, B de uma reta determina um sentido nesta reta. Para simplificar, indicaremos a ordem de sucessão dos dois pontos pelas palavras: o par (AB) ou o par (BA).*

G2) *Dois pares de pontos (AB) e (CD) sempre determinam o mesmo sentido ou dois sentidos opostos. Concordaremos em escrever, para os mesmos sentidos $(AB) = (CD)$ ou $(CD) = (AB)$ e para sentidos opostos $(AB) = -(CD)$ ou $(CD) = -(AB)$.*

G3) *Se os pares (AB) e (CD) determinam o mesmo sentido, e da mesma forma (CD) e (EF), ainda será o mesmo para os pares (AB) e (EF). Portanto, de $(AB) = (CD)$ e $(CD) = (EF)$ segue-se $(AB) = (EF)$.*

G4) *Os pares (AB) e (BA) determinam sentidos opostos, ou seja, $(AB) = -(BA)$ ou $(BA) = -(AB)$. Definição: diremos que B está entre A e C, se tivermos $(AB) = (BC)$.*

G5) *Se $(AB) = (BC)$, também temos $(AB) = (BC) = (AC)$.*

G6) *Existe para qualquer par (AB), pelo menos um ponto X tal que $(AX) = (XB)$ e um ponto Y tal que $(AB) = (BY)$.*

Esses seis axiomas, segundo ele, são suficientes para a ordenação dos pontos sobre a reta, assim como os três primeiros do segundo grupo do sistema de Hilbert. A diferença é que enquanto este último estabelece o significado da relação “estar entre” dois pontos, o grupo acima define a noção de “sentido” determinado por dois pontos.

Uma parte do sistema elaborado por Amoroso Costa se baseia nos axiomas G1-G6 (Quadro 1), de cuja notação o brasileiro também se apropriou. O axioma I é um dos axiomas do primeiro grupo do sistema hilbertiano[45] e, por esse motivo, não está entre os axiomas de Gonseth. O axioma G6 enuncia duas propriedades, aqui identificadas por G6a e G6b, respectivamente.

Axioma no sistema de A. Costa	Axioma no sistema de Gonseth
II	G2
III	G4
IV	G6a
V	G6b
VI	G3
VII	G5

Quadro 1: Correspondência entre os axiomas de Amoroso Costa e os de Gonseth.

Fonte: elaboração própria.

Os axiomas VIII–XI descrevem a relação de congruência de segmentos. Amoroso Costa não registrou a fonte na qual apoiou-se para a formulação desses axiomas, mas conjectura-se que tenha sido Oswald Veblen. Conforme assinalei anteriormente, no capítulo XVI de *As ideias fundamentais da matemática* é apresentado um sistema de postulados para a geometria que o matemático estadunidense expusera em um trabalho publicado em 1924.[46] A correspondência entre os axiomas de Amoroso Costa e os de Veblen é exibida no Quadro 2 a seguir.

Axioma no sistema de A. Costa	Axioma no sistema de Veblen
VIII	V7
IXb	V10
X	V8
XI	V9
XII	V14

Quadro 2: Correspondência entre os axiomas de Amoroso Costa e os de Veblen.

Fonte: elaboração própria.

[45] A partir da segunda edição de *Grundlagen der Geometrie*, ele é o axioma I_3. Hilbert organizou seus axiomas em cinco grupos.
[46] Esse é o ano de publicação da segunda edição do livro (a primeira edição é de 1911) que contém a monografia de Veblen, e que foi utilizada por Amoroso Costa. Detalhes a respeito capítulo XVI do livro de Amoroso Costa podem ser conferidos em Gomes (2022).

Os axiomas V7–V10 (VEBLEN, 1924, p. 27) são:

> V7) *Se $A \neq B$ então sobre qualquer semirreta cuja origem é C existe um, e somente um, ponto D tal que (A, B) é congruente a (C, D).*
> V8) *Se (A, B) é congruente a (C, D) e (C, D) é congruente a (E, F), então (A, B) é congruente a (E, F).*
> V9) *Se (A, B) é congruente a (A', B') e (B, C) é congruente a (B', C') e $\{ABC\}$ e $\{A'B'C'\}$, então (A, C) é congruente a (A', C').*
> V10) *(A, B) é congruente a (B, A).*

O conteúdo dos dois sistemas de axiomas, exceto pela notação, é o mesmo. Por $\{ABC\}$, Veblen exprime a ordem de três pontos sobre a reta, a relação primitiva de seu sistema. Assim, $\{ABC\}$ significa, no de Amoroso Costa, que $(AB) = (BC)$, ou seja, que B está entre A e C. E, como há apenas duas semirretas definidas sobre a reta com origem em um ponto C da mesma reta – considerando que os axiomas I–XIII expressam propriedades que são exclusivamente lineares –, o ponto D, cuja existência e unicidade VIII exprime, é tal que apenas uma de duas possibilidades se coloca: ou $(AB) = (AC)$ ou $(AB) = (CA)$.

Assim como G6, o axioma IX enuncia duas propriedades, sendo IXa a reflexividade da congruência de segmentos. A inclusão dessa propriedade como um axioma é uma ação que desperta curiosidade, uma vez que ela pode ser demonstrada a partir de IXb e X. Além de ser uma dedução bastante trivial, Veblen a expõe na monografia que foi consultada por Amoroso Costa.

Por meio das noções de sentido e congruência é expressa, no axioma XII, a propriedade arquimediana da reta, que em V14 encontra-se assim formulada: "Se A, B, C são três pontos na ordem $\{ABC\}$, e B_1, B_2, B_3 ... são pontos na ordem $\{ABB_1\}, \{AB_1B_2\}$, ... tais que (A, B), é congruente com cada um dos pares de pontos $(B, B_1), (B_1, B_2)$, ... então não existe senão um número finito dos pontos B_1, B_2, ... entre A e C" (VEBLEN, 1924, p. 45). As diferenças entre XII e V14 são, essencialmente, uma questão de notação. Os segmentos $\overline{AB_1}$, $\overline{AB_2}$, $\overline{AB_3}$ ... (seguindo a notação empregada por Amoroso Costa) são múltiplos de $\overline{AB}$, assim o fato de não haver um número infinito de pontos B_i nas condições acima significa que algum múltiplo de $\overline{AB}$ (algum segmento dessa sequência) é maior do que $\overline{AC}$.

O axioma XIII, que exprime a continuidade veronesiana da reta, certamente foi adaptado de Enriques:

> "*Se houver sobre um segmento retilíneo OM duas sequências ilimitadas de segmentos, de um lado $OA_1, OA_2, OA_3, \ldots$, e, do outro lado, $OA'_1, OA'_2, OA'_3, \ldots$, tais que os segmentos da primeira sequência aumentem indefinidamente e os segmentos da segunda sequência diminuam indefinidamente, e isso de maneira que os segmentos $A_1A'_1, A_2A'_2, A_3A'_3, \ldots$ diminuam constantemente para se tornarem menores do que um segmento arbitrariamente fixado antecipadamente (por menor que fixemos esse segmento), a partir de um índice n (que*

> *naturalmente depende da escolha desse segmento), então existe no segmento OM um ponto X tal que OX é maior que todos os segmentos da primeira sequência e menor que todos os segmentos da segunda sequência.*" (ENRIQUES, 1991, p. 36–37).

Como dito anteriormente, o italiano chama a proposição acima de "postulado da continuidade de Cantor", ao que Amoroso Costa acrescentou o nome de Veronese. De fato, a concepção de continuidade expressa por essa proposição fora originalmente apresentada pelo último: "Se o intervalo (XX') cujos extremos são sempre variáveis na direção oposta torna-se indefinidamente pequeno, ele sempre contém um elemento Y de Σ distinto de X e X'" (VERONESE, 1890, p. 612).

Em sua formulação original, o postulado de Veronese diz respeito a um segmento variável $\overline{XX'}$ cujas extremidades, ambas variáveis, "percorrem" os pontos de um segmento fixo $\overline{OM}$ ($\overline{OO'}$, no axioma XIII) em Σ, aproximando-se uma da outra tanto quanto se queira. O segmento $\overline{XX'}$ determina dois segmentos variáveis $\overline{OX}$ e $\overline{OX'}$, com O fixo, de modo que (a) $\overline{OX}$ aumenta e (b) $\overline{OX'}$ diminui enquanto (c) $\overline{OX}$ mantém-se menor do que $\overline{OX'}$ e (d) a distância entre os pontos X e X' torna-se indefinidamente pequena. Essencialmente, é isso o que a formulação de Enriques enuncia, mas numa linguagem "conjuntista", em que os segmentos $OA_1, OA_2, OA_3, \ldots$ são "valores" assumidos por $\overline{OX}$ e $A'_1, OA'_2, OA'_3, \ldots$, por $\overline{OX'}$. Na versão de Amoroso Costa (axioma XIII), $A_1, A_2, A_3, \ldots$ estão entre os pontos do domínio da variável X ($A_1', A_2', A_3', \ldots$, entre os do da variável X') e a condição (a) (condição (b)) acima se exprime por (a') $(OO') = (OA_1) = (A_1A_2) = (A_2A_3), \ldots$ (por (b') $(O'O) = (O'A_1') = (A_1'A_2') = (A_2'A_3'), \ldots$), o que significa que A_1 está entre O e A_2 (A_1' está entre O' e A_2'), A_2 está entre A_1 e A_3 (A_2' está entre A_1' e A_3') e assim sucessivamente e que os pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ($A_1', A_2', A_3', \ldots$) encontram-se todos "à direita" de O ("à esquerda" de O')[47]. Não fosse a condição (d) de Veronese, a condição (c), que em Amoroso Costa (e Enriques) caracteriza-se pelo (c') decrescimento dos termos da sequência $\overline{A_1A_1'}, \overline{A_2A_2'}, \overline{A_3A_3'}, \ldots, \overline{A_nA_n'}, \ldots$, poderia ser expressa por $(OO') = (A_1A_1') = (A_2A_2') = (A_3A_3'), \ldots$, que, juntamente com as outras duas condições, (a') e (b'), teria o mesmo significado.

A conjunção dos axiomas XII e XIII implica a existência de uma bijeção entre pontos da reta e números reais, o que Enriques chama de "representação cartesiana da reta", o tópico seguinte do curso de Amoroso Costa. Não há nenhuma evidência disponível sobre o que ele poderia ter dito em relação a isso. Os itens 3 e 4 do programa sugerem que, depois desse tópico, ele apresentou o postulado de Dedekind e comparou a concepção de continuidade contida nesse postulado com a de Veronese. Essa comparação é feita por Schoenflies no artigo de 1906 que mencionei anteriormente e que foi traduzido por Amoroso Costa, mas apresentando uma versão aritmética, não geométrica, desses postulados.

---

[47] Se a condição fosse simplesmente $(OA_1) = (A_1A_2) = (A_2A_3), \ldots$, ou $(OA_1) = (OO')$ ou $(OA_1) = (O'O)$. O segundo caso significaria que O está entre A_1 e O', ou seja, que o ponto A_1 não está no segmento $\overline{OO'}$. Observação análoga aplica-se à condição $(O'A_1') = (A_1'A_2') = (A_2'A_3') \ldots$.

Seguindo a tendência manifestada no axioma XIII, é provável que Amoroso Costa tenha apresentado uma versão do postulado de Dedekind muito próxima da enunciada por Enriques:

> "*Se um segmento OM é dividido em duas classes de pontos tais que se O pertence à primeira classe e M à segunda, cada ponto de OM pertence a uma das duas classes e qualquer ponto da primeira classe está dentro do segmento formado por O com cada um dos pontos da segunda classe, então existe um ponto X tal que todos os pontos localizados dentro do segmento OX pertencem à primeira classe enquanto todos os pontos localizados no interior do segmento XM pertencem à segunda classe. Mostramos que existe apenas um ponto X com esta propriedade. Também pode acontecer que X coincida com O ou com M.*" (ENRIQUES, 1991, p. 37-38).

As duas classes de pontos descritas pela proposição acima constituem o que atualmente chamamos de um corte de Dedekind. Caso não exista um ponto X nas condições expressas por essa proposição, o corte de Dedekind constitui uma **lacuna** (COHEN; EHRLICH, 1963). A continuidade da reta, sob esse ponto de vista, é caracterizada pelo fato de que nenhum corte de Dedekind sobre a reta é uma lacuna.

Não é difícil imaginar a forma que o enunciado acima teria em uma exposição de Amoroso Costa. Se um corte de Dedekind é determinado por dois conjuntos α e β de pontos sobre um segmento $\overline{OO'}$ tais que (i) O pertence a α e O' pertence a β, (ii) todo ponto de $\overline{OO'}$ ou está em α ou está em β e (iii) todo ponto em α distinto de O está entre O e qualquer ponto de β, então poderíamos esperar algo como: "Se um segmento $\overline{OO'}$ é dividido em duas classes de pontos tais que se (A) O pertence à primeira classe e O' à segunda, (B) cada ponto de $\overline{OO'}$ pertence a uma das duas classes e (C) todo ponto da primeira classe distinto de O está situado entre O e todo ponto da segunda classe[48], então (E) existe um ponto X tal que todo ponto situado entre O e X pertence à primeira classe enquanto todo ponto situado entre X e O' pertence à segunda".

Duas sequências $A_1, A_2, A_3, \ldots$ e $A_1', A_2', A_3', \ldots$ de pontos que satisfazem as condições (a'), (b') e (c') do axioma XIII determinam um corte de Dedekind. Basta definir α como sendo o conjunto dos pontos de $\overline{OO'}$ ao qual pertence O e todos os pontos que se situam entre O e qualquer ponto da sequência $A_1', A_2', A_3', \ldots$ e β como sendo o complementar de α em $\overline{OO'}$. O postulado da continuidade de Veronese poderia então ser formulado exatamente como o de Dedekind o foi acima, acrescentando-se às hipóteses do postulado a condição: (D) para um segmento arbitrariamente fixado, tão pequeno quanto se queira, existe um ponto P da primeira classe e um ponto P' da segunda classe tais que $\overline{PP'}$ é menor do que o segmento arbitrariamente fixado.

Duas classes de pontos com as propriedades (A)-(D) constituem um corte de Veronese, denominação dada por Schoenflies no artigo que mencionei na seção anterior e que discutirei em breve. Um corte de Veronese é, portanto, um corte de Dedekind que satisfaz

[48] Ou, para todo ponto $P \neq O$ em α, $(OP) = (PQ)$, qualquer que seja Q em β.

a condição adicional (D). Desse modo, o que o postulado de Veronese enuncia é que a existência de um ponto X com a propriedade (E) somente é garantida quando os pontos das duas classes α e β de um corte de Dedekind aproximam-se tanto quanto se queira. Isso significa que o continuum linear poderá admitir cortes para os quais não haja um tal ponto X, ou seja, ele poderá conter lacunas. Se o postulado de Veronese não é válido é porque algum corte de Veronese não satisfaz a condição (E), caso em que esse corte constitui um **salto**. A continuidade da reta no sentido veronesiano é então caracterizada pelo fato de que nenhum corte de Veronese sobre a reta é um salto. O continuum, nessa perspectiva, poderá ter lacunas, mas não saltos. Na concepção de continuidade de Cantor-Dedekind, mais restrita, o continuum não poderá ter saltos nem lacunas.

Ao que tudo indica, o objetivo da primeira lição do curso de Amoroso Costa era apresentar uma geometria da reta não-arquimediana, isto é, um sistema caracterizado pelos axiomas I-XI, XIII e negação de XII. O programa do curso sugere que ele considerou encerrar essa primeira parte mostrando (5) a independência do axioma XII, mas a única pista sobre o caminho que seguiu está em uma só folha do dossiê AC.T.3.037. Trata-se de um rascunho intitulado “Modelo de reta não-arquimediana”. O sentido da palavra “modelo”, registrou após o título, emprestara de “Gonseth, p. 14”. A página aludida pertence ao capítulo 1 do livro *Les fondements de mathématique*. Diferente do capítulo 2, em que discute como uma classe de objetos pode ser a realização de dois sistemas axiomáticos diferentes, nessa discussão inicial, o suíço explica que um sistema axiomático pode admitir múltiplas interpretações:

> “*A geometria axiomática limita-se a estabelecer uma tela lógica, estendida entre as noções que não têm outro sentido senão o que lhes confere sua posição no entrelaçamento do tecido lógico. [...] Podemos realizar uma geometria euclidiana dando às noções o significado que elas têm precisamente na geometria elementar. [...] Mas podemos considerar outras possibilidades.*” (GONSETH, 1974, p. 14)

Para ilustrar seu ponto de vista, Gonseth denomina a realização da geometria euclidiana na geometria elementar de modelo M e fornece uma segunda realização daquela baseada nesta que chama de modelo M'. “A geometria euclidiana não é exatamente o modelo M, nem o modelo M', nem nenhum dos modelos análogos que se poderia construir; pelo contrário, é o que é comum a todos: a subestrutura lógica que é idêntica para todos” (1974, p. 14), conclui. De maneira análoga, Amoroso Costa se baseia na (suposta) realização da axiomática da reta arquimediana para tentar obter uma segunda interpretação para essa axiomática, mas uma na qual apenas o axioma XII não se realiza. Para tanto, ele primeiro imaginou a reta (arquimediana) dividida em segmentos $\overline{AB}$ de comprimento $l < 1$, todos congruentes entre si. Em seguida, sobre cada um desses segmentos, supôs pontos P_1, P_2, P_3 ... tais que $(AB) = (AP_1) = (P_1P_2) = (P_2P_3) = \cdots$, sendo P_1 o ponto médio de $\overline{AB}$, P_2 o ponto médio de $\overline{P_1B}$ e assim por diante. Finalmente, sobre as mediatrizes dos segmentos $\overline{AP_1}, \overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}$ ... (de comprimentos $\frac{l}{2}, \frac{l}{4}, \frac{l}{8}$ ...), imaginou pontos M_1, M_2, M_3 ... fora da reta e no mesmo semiplano[49], de maneira que os comprimentos dos segmentos $\overline{M_1P_1}, \overline{M_2P_2}, \overline{M_3P_3}$ ... fossem $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ ... . "A linha quebrada que assim se forma", escreveu, "tem entre os pontos A e B um comprimento infinito $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$... Repitamos a construção em todos os segmentos l da reta primitiva. Sobre a linha quebrada assim obtida, não se verifica o postulado de Arquimedes" (AC.T.3.037, p. 20). Nenhuma explicação adicional foi registrada nessa folha, mas há um desenho (Figura 6) ilustrando a construção acima.

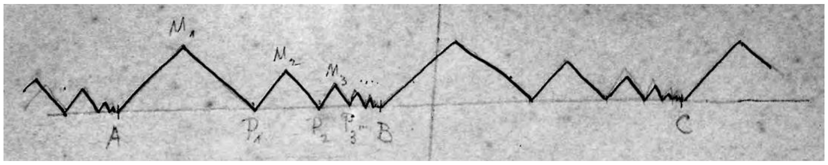


Figura 6: Desenho de Amoroso Costa representando "sua reta não-arquimediana".

Fonte: Dossiê AC.T.3.037, base de dados Zenith/MAST.

Amoroso Costa não explicitou a qual conjunto de pontos corresponde a linha por ele imaginada. As informações que registrou juntamente com a figura que desenhou insinuam que a suposta reta não-arquimediana será a união dos segmentos $\overline{AM_1}, \overline{M_1P_1}, \overline{P_1M_2}, \overline{M_2P_2}$ ... de todos os segmentos em que a reta original foi dividida. Se assim for, a essa união não pertencem as extremidades dos segmentos de comprimento l, porque, caso contrário, B estaria sobre o segmento $\overline{M_kP_{k+1}}$, para algum índice k, coincidindo com o ponto P_{k+1} (uma contradição), e o mesmo raciocínio se aplica ao ponto A enquanto extremidade do segmento adjacente a $\overline{AB}$ na reta original – segmento a partir do qual foi realizada a mesma construção que em $\overline{AB}$. O objeto resultante seria então representado como na Figura 7.

Figura 7: Representação da linha em zigue-zague de Amoroso Costa a partir das considerações acima.

Fonte: elaboração própria.

A "reta" em zigue-zague assim obtida contém segmentos de comprimentos infinitos e, portanto, maiores do que qualquer múltiplo de um segmento finito. Para ver isso, basta considerar três pontos P, Q e R sobre a linha tais que os dois primeiros estejam situados na região do plano compreendida pelas perpendiculares ao segmento $\overline{AB}$ nas extremidades deste e o último, dentro na região do plano compreendida pelas perpendiculares ao segmento $\overline{BC}$

[49] A condição dos pontos estarem no mesmo semiplano com origem na reta determinada por A e B visa apenas facilitar a visualização da construção, não desempenhando papel algum nela.

nas extremidades deste (Figura 8). Sobre a "nova reta", não há um número finito de pontos $B_1, B_2, \ldots$ entre P e R nas condições do axioma XII (o segmento sobre a linha em zigue-zague determinada por esses pontos tem comprimento infinito), portanto, como diz Amoroso Costa, ela não verifica o postulado de Arquimedes.

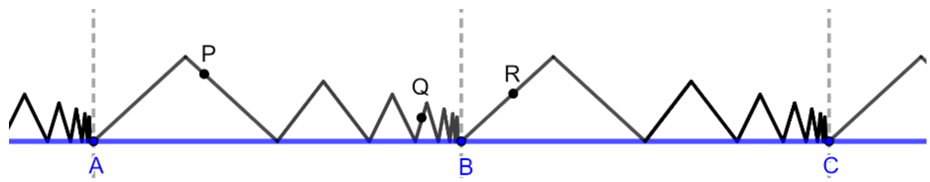


Figura 8: Qualquer múltiplo do segmento determinado pelos pontos P e Q sobre a linha em zigue-zague terá comprimento finito, e portanto menor do que o do segmento determinado pelos pontos P e R, que estão situados em regiões diferentes do plano.

Fonte: elaboração própria.

É claro que a questão ainda não está encerrada; é preciso mostrar que no modelo proposto os outros axiomas são verdadeiros. Na verdade, não são, e Amoroso Costa sabia disso. No manuscrito há a seguinte observação: "Este modelo não verifica o postulado VIII" (grifo do autor).

A noção intuitiva de sentido entre dois pontos sobre a reta arquimediana pode ser estendida naturalmente à nova figura, assim não há dúvidas sobre a verificação dos axiomas I-VII. Estabelecendo, por outro lado, a congruência de dois segmentos a partir do comprimento desses segmentos no plano (arquimediano) que contém a linha em zigue-zague (segmentos congruentes são aqueles com o mesmo comprimento), não há problemas em relação ao axioma IX, muito menos em relação a X e XI, uma vez que, nestes, a congruência de dois segmentos é consequência da congruência entre outros segmentos. A questão é o axioma VIII, que estabelece a congruência de dois segmentos sob certas condições envolvendo as extremidades desses segmentos, o que não pode ser garantido em relação aos pontos P, Q e R da Figura 8 acima. Pois, assumindo que Q, R, P desempenham os papeis atribuídos aos pontos A, B, C no axioma VIII e que exista um ponto D nas condições deste axioma, para que o segmento determinado por P e D sobre a linha em zigue-zague (notação $\widetilde{PD}$) seja congruente àquele com extremidades Q e R ($\widetilde{QR}$), o ponto D deverá estar situado na faixa da linha compreendida pelo segmento $\overline{AB}$ da reta arquimediana, faixa na qual o comprimento de $\widetilde{PD}$ é finito, enquanto o de $\widetilde{QR}$, por ter extremidades em regiões diferentes, é infinito. Assim, não pode existir um ponto D nas condições impostas pelo axioma VIII, que não se verifica para a "nova reta".

Quanto à questão da continuidade, é visível que as extremidades dos segmentos $\overline{AB}$ que dividem a reta original, mas não pertencem à linha construída sobre ela, determinam lacunas sobre esta linha. As classes α e β dos pontos da linha, respectivamente, "à esquerda" e "à direita" de B no plano, formam um corte de Dedekind, que é uma lacuna, tendo em vista a inexistência de um ponto X nas condições do axioma XIII (esse ponto teria que ser B). Não é possível, contudo, encontrar um ponto P em α e um ponto P' em β tais que o segmento $\widetilde{PP'}$ seja inferior a um segmento de comprimento arbitrário dado, uma vez que o comprimento entre esses dois pontos será necessariamente infinito (Figura 9). Assim, o corte de Dedekind não é um corte de Veronese. Como qualquer outro corte que não sobre as extremidades dos segmentos de comprimento l satisfaz as condições do axioma de Dedekind, a linha construída verifica como um todo o axioma XIII, sendo, portanto, contínua do sentido veronesiano.

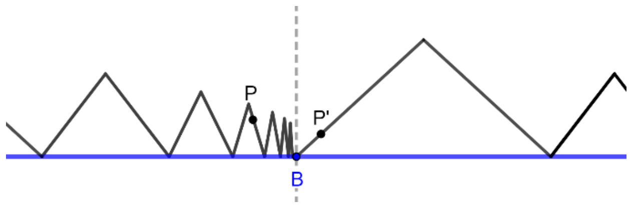


Figura 9: Quaisquer que sejam os pontos P e P' situados, respectivamente, na classe inferior e superior do corte (α, β), $\widetilde{PP'}$ não terá comprimento finito.

Fonte: elaboração própria.

O modelo imaginado por Amorosa Costa é um exemplo bastante simples de um sistema geométrico não-arquimediano, cuja realização se baseia, em última instância, na da geometria da própria reta arquimediana. Mas será que o caso apresentado ainda pode ser entendido como uma tal realização, considerando que outro axioma do sistema, além do de Arquimedes, não se verifica? Como Amoroso Costa teria lidado com a situação? Teria ele concebido um outro modelo? Afinal, o documento analisado é apenas um rascunho, mas sem os manuscritos das palestras, nunca saberemos.

Outra versão do modelo de Amoroso Costa poderia ser obtida tomando-se os simétricos, com respeito às extremidades dos segmentos que dividem a reta, dos pontos P_1, P_2, P_3 ..., repetindo esse procedimento nos outros segmentos. O resultado seria algo como a linha representada na Figura 10. Como a diferença entre um comprimento infinito e um finito é sempre possível na nova linha, o ponto D do axioma VIII não teria que estar na região do plano compreendida por $\overline{AB}$ como no outro modelo, assim sua existência seria possível. Os outros axiomas, inclusive a negação do de Arquimedes, continuariam válidos.

Figura 10: Representação do novo modelo.

Fonte: elaboração própria.

Sistema não-arquimediano de grandezas ou de números?

Vimos anteriormente que Amorosa Costa pretendia apresentar um exemplo de sistema não-arquimediano de grandezas em seu livro. A julgar pelo conteúdo programático de seu curso, a segunda conferência teve o mesmo propósito, mas no lugar de um exemplo foram propostos vários. Embora, naquele momento, o conceito de grandeza não possuísse mais o papel de centralidade que outrora tivera na matemática (EPPLE, 2003), o fato é que os primeiros sistemas matemáticos não-arquimedianos surgiram no contexto dos estudos sobre esse conceito (EHRLICH, 1994, 2006). Ainda na primeira metade da década de 1880, na busca por uma caracterização rigorosa para tal conceito, Otto Stolz introduziu uma teoria axiomática da grandeza, que lhe permitiu formular explicitamente a propriedade arquimediana. Com isso, foi capaz de demonstrar que existem classes de objetos que mesmo satisfazendo os axiomas de sua teoria – e que, portanto, são sistemas de grandezas –, não possuem essa propriedade[50]. Para isso, Stolz recorreu, primeiro, ao cálculo de ordens infinitas de funções desenvolvido anos antes por Paul du Bois-Reymond (1831–1889) e, depois, ao seu próprio sistema de “momentos” de funções[51].

Os sistemas de Stolz e de du Bois-Reymond são os dois primeiros tópicos da segunda lição do curso do IFBAC. Sobre eles não se encontra nenhum registro entre os manuscritos do dossiê AC.T.3.037. Em relação ao tópico seguinte, que Amoroso Costa pretendia originalmente incluir em seu livro, há uma tradução sua de um fragmento do volume sobre geometria de *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte*, de Felix Klein. Na passagem aludida, Klein aborda o postulado de Arquimedes por meio do exame de um sistema de ângulos – por ele denominados *hornförmigen Winkel*, que Amoroso Costa traduziu como “ângulos em forma de chifre” e abreviou como “ângulos-em-chifre” [52] – que não o verifica. “Nós poderemos avaliar melhor o alcance do axioma mencionado”, diz Klein, segundo a tradução do brasileiro, “se pusermos diante dos olhos **o seguinte sistema de grandezas geométricas concretas que dele não dependem**, um exemplo que também é interessante por isso que já era conhecido na Antiguidade e na Idade Média e sofreu repetidas discussões” (AC.T.3.037, p. 11 e 13, grifo do autor). Talvez a intenção de Amoroso Costa ao discutir todos esses exemplos fosse mostrar que os sistemas não-arquimedianos são comuns na matemática.

É possível que Amoroso Costa tenha feito a tradução do texto de Klein antes da produção do capítulo de seu livro que versa sobre o mesmo assunto, uma vez que a seção desse capítulo em que discute tal exemplo, como ele próprio registrou em seus rascunhos, foi retirado do livro do matemático alemão. Uma tradução da seção 12 de *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert, intitulada *A independência do axioma da continuidade V*, também figura entre os manuscritos do dossiê AC.T.3.037. Naquela seção, o matemático alemão

[50] Stolz, além disso, tentou demonstrar que todo sistema de grandezas que verifica o postulado da continuidade de Dedekind também verifica o postulado de Arquimedes, isto é, que o segundo é uma consequência do primeiro (desde que os outros axiomas da teoria de grandezas sejam válidos). Sua prova, porém, continha um erro e, embora ele a tenha tentado corrigir nos anos seguintes, novas demonstrações foram apresentadas por Rodolfo Bettazzi (1861–1841), em 1890, e por Otto L. Hölder (1859–1937), em 1901 (EHRLICH, 2006).

[51] Exposições sobre esses sistemas podem ser encontradas em Ehrlich (2006) e Laugwitz (2002).

[52] Uma apresentação sobre esse assunto encontra-se em Gomes (2021).

sugere a construção de um sistema de funções algébricas que se comporta como um sistema ordenado de números em que o postulado de Arquimedes – para ele, axioma V1 da continuidade – não é válido (HILBERT, 2003). Seguindo Enriques, Amoroso Costa os chama de "números funcionais", e dessa forma nomeou o quarto tópico do programa de sua segunda palestra.

Infelizmente, sem os manuscritos das conferências, os documentos acima nada nos dizem sobre a exposição de Amoroso Costa. Pode-se concluir, através deles, que o brasileiro se dirigiu às fontes originais dos temas que abordou. Contudo, há questões importantes envolvendo esses temas que não podem ser respondidas. Por exemplo, se os sistemas não-arquimedianos de du Bois-Reymond e Stolz foram abordados por este no contexto de suas investigações sobre o conceito matemático de grandeza, este conceito foi discutido por Amoroso Costa ao apresentá-los? Se sim, do ponto de vista axiomático, tal como o fez em sua primeira conferência com relação à geometria da reta? Ou teriam sido apresentados numa "perspectiva ingênua" de grandeza como Klein o fez em relação a seu sistema de ângulos? Se foi da segunda forma, como distinguiu entre "sistema de grandezas" e "sistema de números", sendo que a última nomenclatura foi por ele adotada em relação ao exemplo de Hilbert?

Além das questões acima, um outro ponto merece atenção quando olhamos para o programa da segunda parte do curso do IFBAC. Os exemplos 6 a 9 são associados aos nomes de seus respectivos autores, mas nenhum nome aparece ligado ao décimo tema, intitulado, simplesmente, "sistemas de pares não-arquimedianos de números reais". Sobre esse assunto, há um manuscrito de quatro folhas no dossiê AC.T.3.037, de autoria do próprio Amoroso Costa, onde ele apresenta três sistemas numéricos considerados como pares de números reais. Na primeira folha, são introduzidas algumas definições, que uma nota avisa que serão comuns aos casos apresentados adiante. A primeira definição determina a igualdade de dois pares de números reais (a, b) e (a', b') a partir da igualdade entre a e a' e b e b' – relação que é reflexiva, simétrica e transitiva –, e a segunda estabelece uma relação de ordem entre esses pares, da seguinte maneira:

$$(a,b) < (a',b') \text{ se } \begin{cases} 1)\ b < b',\ a \text{ e } a' \text{ sendo quaisquer} \\ 2)\ b = b' \text{ e } a < a'. \end{cases}$$

e

$$(a,b) > (a',b') \text{ se } \begin{cases} 1)\ b > b',\ a \text{ e } a' \text{ sendo quaisquer} \\ 2)\ b = b' \text{ e } a > a'. \end{cases}$$

A relação assim definida, observa Amoroso Costa (AC.T.3.037, p. 21), "é compatível com a da igualdade. As duas reunidas compreendem todos os casos possíveis" (o que significa que: ou $A = B$ ou $A < B$ ou $A > B$) e satisfaz, além disso, as condições: 1) Se $A < B$, $B > A$; 2) Se $A < B$ e $B < C$, então $A < C$ e 3) Se $A < B$ e $B = C$, então $A < C$.

Os números da forma (a, b) definidos dessa maneira, explica, admitem uma interpretação geométrica (Figura 11), assumindo que "(a, b) se representa por um ponto de abscissa b e ordenada a".

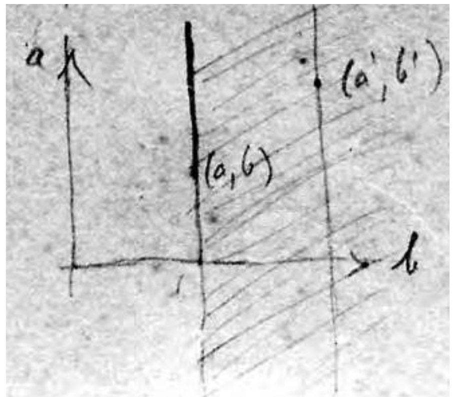


Figura 11: Desenho de Amoroso Costa indicando como devem ser interpretados geometricamente seus números.

Fonte: Dossiê AC.T.3.037, base de dados Zenith/MAST.

As definições das operações sobre cada sistema são apresentadas e comentadas nas folhas seguintes do manuscrito. A multiplicação é a mesma para cada caso:

$$(a,b)\times(a',b')=(aa',b+b')$$

E a adição é definida de modo diferente em cada situação, conforme sintetizado no quadro a seguir:

sistema	definição
1º	$(a,b)+(a',b')=\left(a+a',\dfrac{b+b'}{2}\right)$
2º	$(a,b)+(a',b')=\left(a+a',\dfrac{ab+a'b'}{a+a'}\right)$
3º	$(a,b)+(a',b')=(a+a',b)$

Quadro 3: Adições definidas por Amoroso Costa em seu manuscrito.

Fonte: elaboração própria.

Essas definições visam todas a mesma consequência: para n natural, $n\times(a,b)=(na,b)$, para que assim se tenha $n\times(a,b)<(a',b')$ quando $b<b'$, e, dessa forma, não seja válido o postulado de Arquimedes. Isso é conseguido nas três adições uma vez que $n\times(a,b)$ abrevia uma soma de n parcelas iguais a (a,b). É preciso também que o produto $n\times(a,b)$ seja a mesma coisa que $(n,0)\times(a,b)$, requisito atendido pela forma como a

multiplicação foi definida, tendo em vista que os números reais são identificados com os números da forma $(a, 0)$.

A adição do 1º sistema, registrou Amoroso Costa, é unívoca, comutativa e não-associativa, enquanto a do 2º, unívoca, comutativa e associativa. Ele não esboçou uma justificativa para essas propriedades. Sobre o sistema no qual está definida a terceira adição, há apenas uma observação de que a operação não é comutativa[53]. Enquanto a subtração é unívoca e sempre possível no 1º sistema – sendo o par $(a' - a, 2b' - b)$ a diferença entre (a', b') e (a, b) –, no 2º sistema, destacou ele, a diferença entre os dois pares, da forma $\left(a' - a, \frac{a'b' - ab}{a' - a}\right)$, só tem sentido quando $a' > a$.[54] Em relação à multiplicação, escreveu, são válidas as propriedades comutativa e associativa, e, nos sistemas 1º e 2º, distributiva em relação à adição (ele escreveu uma demonstração desta propriedade para o segundo caso). A divisão entre (a', b') e (a, b), acrescentou, é unívoca e sempre possível para $a \neq 0$.

Esse manuscrito não contém qualquer indicação (a) de onde Amoroso Costa retirou a ideia para seus sistemas de pares de números reais, muito menos (b) do que significava para ele a expressão "sistema de números". As propriedades das operações e relações definidas no documento podem, porém, nos ajudar a formular algumas hipóteses em relação a (b). Um sistema de números, na perspectiva contida nesse documento, seria um conjunto N totalmente ordenado – no caso dos sistemas apresentados, a ordem total sobre N é a relação R tal que $(a, b)R(a', b') \Leftrightarrow (a, b) = (a', b')$ ou $(a, b) < (a', b')$ –, sobre o qual estão definidas uma adição e multiplicação tais que a adição é i) comutativa, ii) associativa e iii) a subtração é sempre possível e univocamente determinada, e a multiplicação é iv) comutativa, v) associativa, vi) a divisão é sempre possível e univocamente determinada (para os elementos de N diferentes de zero?) e vii) distributiva em relação à adição. A propriedade iii, seguindo Amoroso Costa, significa determinar (x, y) na igualdade $(x, y) + (a, b) = (a', b')$, e a sua equivalente na multiplicação, vi, determinar (x, y) tal que $(x, y) \times (a, b) = (a', b')$.

O sistema definido apenas pelos axiomas i-vii constitui um corpo, conforme caracterização fornecida pelo matemático estadunidense Edward V. Huntington (1874-1952). No sistema de Huntington (1903), a existência do elemento neutro e do inverso, em ambas as operações, é uma consequência dos axiomas iii e vi acima, que podem ser expressos da seguinte forma: iii) para quaisquer $x, y \in N$, existe $z \in N$ tal que $x + z = y$; vi) para quaisquer $x, y \in N$, se $x + x \neq x$, existe $z \in N$ tal que $xz = y$. A unicidade do elemento z pode ser demonstrada, assim a univocidade da subtração e da divisão mencionada por Amoroso Costa é redundante. E, como o zero não é definido pelos axiomas, se assume que $x + x \neq x$, no axioma vi. Se o brasileiro de fato se baseou no artigo de Huntington é uma

[53] Sobre esse terceiro sistema, há uma nota: "ver obs. de Natucci, II 1". Trata-se do matemático italiano Alpinolo Natucci (1883–1975), em cujo livro *Il concetto di numero e le sue estensioni* (1923), há um capítulo sobre matemática não-arquimediana. Não foi possível identificar se a observação mencionada por Amoroso Costa diz respeito a essa obra.

[54] O motivo para a restrição $a' > a$ não foi exposto, pois basta que $a' \neq a$. De qualquer modo, continua válida a conclusão de que a subtração não é sempre possível no 2º sistema.

incógnita. Amoroso Costa indicou na bibliografia do primeiro rascunho de seu livro conhecer vários dos trabalhos publicados pelo matemático estadunidense[55], então é possível.

Naturalmente, nenhum dos três sistemas propostos por Amoroso Costa é um corpo. E, embora nenhuma das três adições tenha elemento neutro, as propriedades da compatibilidade da adição e da multiplicação em relação à ordem R definida sobre N não são mencionadas no manuscrito. Assim, sem as notas das palestras, é difícil conjecturar sobre suas intenções. Sobre a questão (b), algumas pistas adicionais podem ser encontradas nos manuscritos de *As ideias fundamentais da matemática*.

O 1º sistema esboçado em seu manuscrito foi o que substituiu os ângulos corniformes de Klein na parte sobre geometrias não-arquimedianas do livro. Após introduzir a definição da adição nesse sistema, ele observa que a "operação é unívoca, comutativa, **porém, em geral, não-associativa**. Os números, que estamos considerando, não constituem, portanto um **sistema de números**, no sentido que se atribuiu a esta expressão no § 79" (COSTA, 1929, p. 214, grifos do autor). A seção aludida nessa passagem se refere a uma definição apresentada no capítulo XV, na qual, apoiando-se em um trabalho de Leonard E. Dickson (1874-1954), conforme indicado em uma nota de rodapé, Amoroso Costa estabelece um sistema de números como um conjunto N sobre o qual estão definidas duas operações $+$ e $\times$ tais que (i) N é um grupo em relação a $+$, (ii) N é um grupo, com exceção do elemento neutro de $+$, em relação a $\times$, e (iii) $\times$ é distributiva à esquerda e à direita de $+$. Sua fala sugere, portanto, que a concepção de sistema de números que tinha em mente era mais ampla do que a delimitada por essa definição.

No manuscrito da primeira versão do capítulo XV, encontra-se a seguinte observação: "ver também Encycl. N. complex. p. 369". A abreviatura "N. complex." refere-se ao título de um artigo da *Encyclopédie*, a saber, *Nombres complexes ordinaires*, de autoria de C. H. Eduard Study (1862–1930) e Élie J. Cartan (1869–1951), mas dessa vez do tomo 1, volume 1. A página assinalada é onde começa a seção intitulada *Généralités sur les systèmes de nombres*, uma discussão sobre, justamente, o que vem a ser um sistema numérico. Os autores o caracterizam como um conjunto qualquer de objetos sobre os quais são definidos a relação de igualdade e duas operações sujeitas a certas propriedades, sendo uma de suas referências o artigo de Dickson (1905) utilizado por Amoroso Costa[56]. Particularmente interessante é o que dizem Study e Cartan no começo de sua exposição:

> "[...] *a natureza do objeto que chamamos de número é absolutamente indiferente e não desempenha nenhum papel; o essencial são as leis de cálculo a que estão sujeitos esses objetos. Certos autores só usam a palavra número em um sentido muito mais restrito e a reservam para números inteiros e seres mais ou menos análogos, como números algébricos, números cardinais infinitos; é nesse sentido que se fala da teoria dos números; em todos os outros casos, eles usam a palavra vaga de*

[55] As quatro primeiras folhas do manuscrito da primeira versão de *As ideias fundamentais da matemática* contêm as referências bibliográficas utilizadas por Amoroso Costa para o livro. Segundo uma codificação empregada por ele, os trabalhos que leu eram assinalados com "v", e entre eles há alguns artigos de Huntington.

[56] Assim, é possível que Amoroso Costa tenha tomado conhecimento desse trabalho de Dickson através da monografia de Study e Cartan.

> *quantidade; desse ponto de vista, deveríamos dizer quantidade irracional em vez de número irracional. No entanto, parece preferível reservar a palavra quantidade para objetos capazes de adição (e de multiplicação por números reais), mas não de multiplicação entre si.*" (STUDY; CARTAN, 1992, p. 369-370).

Essa fala reflete a dificuldade enfrentada pelos matemáticos naquele momento – o fascículo que contém o texto de Study e Cartan foi originalmente publicado em 1908 – para estabelecer uma distinção precisa entre os conceitos de número e grandeza (quantidade) e para determinar a exata natureza da relação entre esses conceitos[57]. Embora o paradigma da matemática como ciência da grandeza estivesse dando lugar ao paradigma "conjuntista" e o estudo dos sistemas de grandezas, ao dos sistemas algébricos ordenados, o termo "grandeza" e seu homólogo "quantidade" continuavam sendo amplamente usados. Amoroso Costa pretendia originalmente incluir uma discussão em seu livro sobre o conceito de grandeza e sua relação com o conceito de número, mas desistiu da ideia[58]. No manuscrito do texto não publicado ele registrou: "o conceito de ciência matemática pura tende a se tornar cada vez mais independente da noção de grandeza" (AC.T.3.033, p. 302).

Números de Veronese

São poucos os vestígios dos conteúdos abordados na terceira parte do curso. É provável que o tema 11, definições de pares de números arquimedianos e não-arquimedianos, esteja relacionado ao último tópico da segunda parte, mas Amoroso Costa não preservou nenhum registro sobre isso entre os seus rascunhos. Sobre os conteúdos dos tópicos 12 a 14, é possível fazer algumas conjecturas. Como os ordinais transfinitos de Cantor, 12º tema do programa, aparecem em alguma medida na discussão sobre os números de Veronese, a escolha de começar por esse tema parece acertada.

No livro *Fondamenti di geometria*, de 1891, Veronese introduz "seus números" como medidas dos segmentos infinitamente grandes da reta não-arquimediana descrita por sua teoria. Em linhas gerais[59], se $\overline{AC}$ é um segmento infinitamente grande em relação a um segmento unitário $\overline{AB}$ na reta veronesiana, e ∞_1 é o comprimento de $\overline{AC}$, então ∞_1 é um número infinitamente grande, assim como $\infty_1 + n$ e $\infty_1 - n$, que são os comprimentos, respectivamente, da soma e da diferença entre $\overline{AC}$ e a soma de n segmentos congruentes a $\overline{AB}$. E da mesma forma que com qualquer segmento finito, é possível considerar um múltiplo de $\overline{AC}$ por qualquer número natural m e somar a ou subtrair dele um múltiplo de $\overline{AC}$, obtendo assim o número $m \cdot \infty_1 + n$ ou $m \cdot \infty_1 - n$.[60] Construção algébrica análoga se pode fazer com o ordinal transfinito ω de Cantor, obtendo os números $m \cdot \omega + n$ e $m \cdot \omega - n$. Porém, assim como $\omega - n = \omega$, $m \cdot \omega - n = m \cdot \omega$, uma propriedade que não se verifica em

[57] Epple (2003) defende que, na verdade, essas dificuldades ainda não foram superadas.
[58] Sobre esse assunto ver Gomes (2024).
[59] A presente exposição constitui uma simplificação das ideias relativas ao sistema geométrico de Veronese. Uma exposição mais detalhada sobre o tema é fornecida por Fisher (1994).
[60] Para Veronese, o multiplicador é o fator direito, então ele escreve $m \cdot \infty_1$ como $\infty_1 \cdot m$.

relação ao número $m \cdot \infty_1 - n$, pois este representa o comprimento de um segmento menor do que o que tem medida $m \cdot \infty_1$ (da mesma maneira que $\infty_1 - n$ é menor do que ∞_1). Essa é uma diferença fundamental entre os ordinais infinitos de Cantor e seus números transfinitos, diz Veronese:

> "*A diferença entre nosso número infinito e o número ω de Cantor é que não existe nosso primeiro número infinito, enquanto, entre os números infinitos de Cantor, ω é o primeiro no sentido absoluto; isso significa que, dado um de nossos números infinitos, por exemplo,* ∞_1*, existem, por exemplo, os números* $\infty_1 - n$*, distintos de* ∞_1*, que estão entre os números finitos e o número* ∞_1." (VERONESE, 1891, p. 103)

O sistema geométrico de Veronese admite segmentos infinitos de várias ordens. Tomando o segmento infinitamente grande $\overline{AC}$, de medida ∞_1, como nova unidade de medida, haverá um segmento $\overline{AD}$ infinitamente grande em relação a $\overline{AC}$, cujo comprimento será uma medida infinitamente grande de segunda ordem em relação à da unidade $\overline{AB}$. Se o segmento $\overline{AD}$ contém, digamos, ∞_1 vezes $\overline{AC}$, então sua medida será $\infty_1 \cdot \infty_1$, denotada por ${\infty_1}^2$, um número transfinito de segunda ordem. A essa medida pode-se acrescentar ou subtrair qualquer múltiplo de ∞_1, bem como da unidade, e assim chega-se aos números da forma $\infty_2 \pm m \cdot \infty_1 \pm n$, que podem ser estendidos indefinidamente considerando-se novas potências de ∞_1: ${\infty_1}^m \pm n_1 \cdot {\infty_1}^{m-1} + \cdots + n_{m-1} \cdot \infty_1 \pm n_m$. As potências de ∞_1 podem ainda admitir como expoente o número ω de Cantor ou qualquer outro número transfinito, inclusive o próprio ∞_1 e suas potências, chegando-se a novas extensões.

Generalizações do sistema de números ordinais de Cantor, por outro lado, começam pela observação que o número ω^2, que denota o produto $\omega \cdot \omega$, é maior do que qualquer ordinal da forma $m \cdot \omega + n$, sendo ele o menor número dos da classe $p \cdot \omega^2 + m \cdot \omega + n$. Estes são sucedidos por ω^3, que será o elemento mínimo da próxima classe de números e assim por diante, chegando-se aos ordinais da forma $\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \cdots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu$, que ainda podem ser estendidos indefinidamente a começar por ω^ω (JOURDAIN, 1955). O sistema de números transfinitos veronesianos pode ser generalizado de forma análoga, como se viu acima, embora existam algumas diferenças importantes, como o próprio Veronese apontou. Essa comparação pode ter sido objeto de discussão por Amoroso Costa nos tópicos 13 e 14 de seu curso.

O trabalho iniciado por Veronese sobre números transfinitos foi continuado por T. Levi-Civita, Arthur. M. Schoenflies e Hans Hahn (1879-1934) nos anos seguintes ao da publicação do livro do italiano (FISHER, 1994). Um artigo que o segundo autor desse trio publicou em 1906, mencionado outras vezes no presente trabalho, é a única das referências do dossiê AC.T.3.037 traduzida integralmente por Amoroso Costa. Isso sugere que o brasileiro tenha dado a esse estudo uma atenção especial. Seguramente ele foi usado por Amoroso Costa na discussão do 4º tópico do curso do IFBAC, e é provável que na exposição sobre os números de Veronese do 14º tópico ele o tenha seguido de perto. A questão, que não poderá ser respondida aqui, é qual ou quais pontos do artigo de Schoenflies foi (foram) abordado(s).

O título do trabalho do matemático alemão é *Über die Möglichkeit einer projektiven Geometrie bei transfiniter (nicht archimedischer) Maßbestimmung*, que Amoroso Costa traduziu como: *Sobre a possibilidade de uma geometria projetiva baseada na definição transfinita (não-arquimediana) da medida*. O objetivo do trabalho, em linhas gerais[61], é determinar sob que condições os números transfinitos de Veronese constituem um corpo numérico (*Zahlkörper*) e um continuum no sentido veronesiano e, uma vez possuindo essas propriedades, se tal sistema de números é suficiente para a representação dos pontos da reta a fim de que sejam válidas as proposições da geometria projetiva. No continuum veronesiano podem ocorrer lacunas, e isso, assinala Schoenflies, pode ser um problema quando se quer, por exemplo, encontrar os pontos de interseção entre uma cônica e uma reta. A sua abordagem nesse trabalho é bastante intuitiva e os resultados são apresentados sem demonstração. Ele conclui que a geometria projetiva só se aplica ao espaço veronesiano se o sistema dos números da forma $A_\lambda \omega^\lambda + \cdots + A_1\omega + a_0 + \frac{a_1}{\omega} + \cdots + \frac{a_\lambda}{\omega^\lambda} + \cdots$, em que ω é uma unidade infinitamente grande e os coeficientes A_i e a_i assumem valores reais racionais quaisquer, for ampliado por meio da introdução de novas unidades transfinitas, sendo essas unidades potências fracionárias de ω e seu inverso.[62]

Sem a possibilidade de conferir os manuscritos das palestras, não podemos saber se Amoroso Costa avançou o tema em sua apresentação a ponto de chegar a discutir as conclusões de Schoenflies, mas é provável que tenha ido além da discussão inicial. A expressão "generalizações dos números de Veronese" tem um significado um tanto amplo e pode se referir a outros aspectos da discussão que o último apresentou em seu artigo.

[61] O artigo de Schoenflies constitui, por si só, tema para um outro trabalho, portanto limitar-me-ei aqui a resumir os aspectos do conteúdo desse artigo que são essenciais à presente discussão.

[62] Os números $A_\lambda \omega^\lambda + \cdots + A_1\omega + a_0 + \frac{a_1}{\omega} + \cdots + \frac{a_\lambda}{\omega^\lambda} + \cdots$ são construídos a partir do número transfinito ω, definido como aquele que, para todo número real positivo a e todo número natural ν, verifica a relação $\nu a < \omega$, de onde se conclui que $\frac{1}{\omega}$ é uma unidade infinitamente pequena. O fato de ω satisfazer a condição acima, implica, em particular, que $\nu \cdot 1 < \omega$, donde $\nu \cdot \frac{1}{\omega} < 1$, para todo natural ν, o que está de acordo com as considerações que Amoroso Costa faz em seu livro sobre a unidade η. Essas conclusões só são válidas, naturalmente, se sobre o novo sistema de números se verificam as propriedades algébricas de um corpo ordenado. Se for assim, da desigualdade $\nu \cdot 1 < \omega$ também segue que $\nu \cdot \omega^{\lambda-1} < \omega^\lambda$, para todo natural ν, o que caracteriza ω^λ como uma unidade infinitamente grande em relação a $\omega^{\lambda-1}$. Dessas considerações, derivam os números transfinitos mais simples, sob as formas $a_0 + \frac{a_1}{\omega}$ e $A_1\omega + A_0$. Porém, esses números não formam um sistema fechado em relação à multiplicação (se se impõe a condição da potência ω^2 ser um número da forma $A_1\omega + A_0$, para resolver esse problema, o novo sistema não será um corpo ordenado), assim são obtidos os números das formas $a_0 + \frac{a_1}{\omega} + \frac{a_2}{\omega^2} + \cdots + \frac{a_\lambda}{\omega^\lambda}$ e $A_\lambda \omega^\lambda + \cdots + A_1\omega + A_0$, mas entre os quais a divisão nem sempre é possível. O próximo passo é então considerar os números da forma $A_\lambda \omega^\lambda + \cdots + A_1\omega + a_0 + \frac{a_1}{\omega} + \cdots + \frac{a_\lambda}{\omega^\lambda}$, mas, nesse caso, nem todo número diferente de zero terá um inverso multiplicativo (como acontece, por exemplo, com $\frac{1}{\omega+1}$), e por esse motivo Schoenflies teve que considerar em suas análises um sistema de números constituídos por infinitas unidades infinitesimais.

Considerações finais

Neste trabalho, foram abordados os estudos não-arquimedianos de Amoroso Costa, entendidos como eventos que compõem o campo dos acontecimentos da matemática de um determinado momento e contexto histórico. No processo de construção de uma interpretação para esses eventos, foi considerada ampla documentação: documentos do arquivo pessoal do autor, publicações suas, obras de outros autores e estudos históricos sobre o tema por ele investigado, bem como artigos e notas de jornais da época, entre outros. A interpretação oferecida neste artigo não pretende ser definitiva, muito menos completa. Aqui foram apresentadas somente algumas conjecturas a respeito do percurso investigativo subjacente aos estudos de Amoroso Costa sobre matemática não-arquimediana, tendo em conta o contexto sócio-histórico em que tais estudos se inserem, sendo propostas questões sobre as quais, possivelmente, o brasileiro se debruçou nesse percurso. Naturalmente, as questões formuladas refletem as escolhas que foram feitas.

Vimos que as palestras de Amoroso Costa no estrangeiro não foram um evento isolado. Outros acadêmicos brasileiros e professores de outros países que mantinham relação de cooperação intelectual com a França também deram cursos sobre suas especialidades em Paris. Por isso, é preciso cautela com interpretações como a de Santos (1971, p. 23–24), para quem "é sintomático do reconhecimento do significado e da importância de suas ideias, na matéria, que o Instituto Franco Brasileiro de Alta Cultura haja patrocinado a sua ida à França, em 1928, para ministrar, na Universidade de Paris, curso sôbre as geometrias não-arquimedianas". Amoroso Costa nada tinha publicado sobre o assunto antes de propor seu curso, assim não pode ter sido em reconhecimento a suas pesquisas sobre o tema que se deu a sua participação no intercâmbio do IFBAC. Ao mesmo tempo, há evidências de que seu trabalho foi apreciado na França, sendo ele convidado a fazer comunicação na Société Mathématique de France – comunicação que, por motivos desconhecidos, não chegou a realizar.

Os estudos de Amoroso Costa relacionados a matemática não-arquimediana, até onde foi possível averiguar, compreendem, principalmente, pesquisas que foram realizadas nas duas últimas décadas do século XIX e na primeira década do século XX. Lélio Gama (1971, p. 34), se referindo a esse trabalho, diz que ele constitui "uma das primeiras elaborações, que se têm feito, de uma sistematização final das geometrias, não arquimedianas". De fato, a organização das conferências do IFBAC sugere mais uma síntese das pesquisas sobre matemática não-arquimediana até a primeira década do século XX (ou até o momento das conferências) do que uma apresentação original. Faltam, é claro, os documentos das conferências, assim não sabemos o que ele pode ter pesquisado em relação aos dois últimos tópicos do programa de seu curso e quais os resultados que obteve. Mas mesmo com aqueles documentos em mãos, para poder avaliar a natureza de suas contribuições ainda seria preciso compreender melhor os desenvolvimentos não-arquimedianos nas primeiras décadas do século passado, um assunto que por si só demanda mais estudos.

Ao historiador só resta proceder como o "estudioso de Tobias Moscoso", que, sem ter acompanhado o curso de Amoroso Costa, tenta alcançar o conhecimento sobre o tema nele abordado "de modo não tão completo" e somente após "longa rebusca em vultosa bibliografia", pois lhe falta, ao menos, "a contribuição original trazida por Amoroso Costa".

Bibliografia

ALMEIDA, Miguel Ozorio de. *A vulgarização do saber*. Rio de Janeiro: Ariel, 1931.

ANÔNIMO. *Anotações (04) diversas de autoria não identificada: ementa do curso 'Les geometries non-archimédiennes'; anotações sobre diversos trabalhos de A.C. e levantamentos bibliográficos*. AC.T.4.001. Rio de Janeiro: MAST, n.d.

AUDIN, Michèle. *Le séminaire de mathématiques 1933-1939*. [S. l.: s. n.], 2014. Disponível em: https://proceedings.centre-mersenne.org/books/. Acesso em: 12 jun. 2023.

BRASIL. *Decreto nº 4.634, de 8 de janeiro de 1923*. Concede á Universidade do Rio de Janeiro uma subvenção especial de 50:000$, annuaes, a fim de ser fundado e mantido um Instituto Franco-Brasileiro de alta cultura, scientifica e litteraria, segundo as negociações que entabolarem entre os Governos Brasileiro e Francez, e estabelece as condições de administração e funccionamento do Instituto. Disponível em: ttps://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1920-1929/decreto-4634-8-janeiro-1923-66570-publicacaooriginal-90138-pl.html. Acesso em: 3 abr. 2023.

COHEN, Leon Warren; EHRLICH, Gertrude. *The structure of the real number system*. New York: Van Nostrand, 1963.

COSTA, Manuel Amoroso. *As idéas fundamentaes da mathematica*. Rio de Janeiro: Pimenta de Mello, 1929.

______. *As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios*. São Paulo: Grijalbo, 1971.

______. *Introdução à teoria da relatividade*. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1995.

______. *Notas (03) dos cursos (Introdução à filosofia das ciências/prof. Abel Rey; Teoria do Conhecimento/prof. Léon Brunschvicg e Teoria do movimento da Lua/prof. Henri Andoyer) realizados na Faculdade de Letras e Ciências de Paris*. AC.T.3.013. Rio de Janeiro: MAST, 1920-1921.

______. *Manuscritos do trabalho 'Idéias fundamentais da matemática'*. AC.T.3.031. Rio de Janeiro: MAST, n.d.

______. *Manuscritos do trabalho 'Sobre a concepção da matemática pura'*. AC.T.3.033. Rio de Janeiro: MAST, n.d.

______. *Manuscritos sobre pontos diversos de matemática traduzidos de obras estrangeiras*. AC.T.3.037. Rio de Janeiro: MAST, n.d.

DICKSON, Leonard Eugene. Definitions of a group and a field by independent postulates. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 6, n. 2, p. 198-204, abr. 1905.

EHRLICH, Philip. General introduction. *In*: ______ (ed.). *Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua*. Dordrecht: Kluwer Academic, 1994. p. vii-xxxii.

______. The rise of non-archimedean mathematics and the roots of a misconception I: the emergence of non-archimedean systems of magnitudes. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 60, n. 1, p. 1–121, jan. 2006.

ENRIQUES, Abramo Giulio Umberto Federigo. Principes de la geométrie. *In*: MOLK, Jules (ed.). *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*. Sceaux: Éditions Jacques Gabay, 1991. t. 3, v. 1, p. 1147.

EPPLE, Moritz. The end of the science of quantity: foundations of analysis, 18601910. *In*: JAHNKE, Hans Niels (ed.). *A history of analysis*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2003. p. 291–323.

FABRIS, Júlio C.; GUIMARÃES, Luiz Filipe. Sobre Amoroso Costa: uma conversa com Arthur Gerhardt Santos. Cadernos de Astronomia, v. 5, n. 1, p. 124–131, 2024.

FISHER, Gordon. Veronese's non-archimedean linear continuum. *In*: EHRLICH, Philip (ed.). *Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua*. Dordrecht: Kluwer Academic, 1994. p. 107–145.

GALVÃO, Benjamin Franklin de Ramiz et al. *Documentos (04) do Instituto Histórico e Geográfico Brasileiro e da Universidade do Rio de Janeiro a A.C. sobre colaboração em publicação e convite para lecionar na recém criada Faculdade de Filosofia e Letras do IHGB e a respeito de conferências em Paris sob os auspícios do Instituto Franco Brasileiro de Alta Cultura.* AC.T.2.002. Rio de Janeiro: MAST, 1919–1928.

GAMA, Lélio. A obra de Amoroso Costa. *In*: COSTA, Manuel Amoroso. *As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios*. São Paulo: Grijalbo, 1971. pp. 27–37.

GOMES, Rodrigo Rafael. O conceito de número não-arquimediano segundo Amoroso Costa: primeiras impressões de uma pesquisa. In: OLIVEIRA, Mirella. N.; GOMES, Rodrigo R.; PANTANO FILHO, Rubens. Matemática e ciências: ensino, pesquisa e extensão. Salto, SP: Fox Tablet, 2021. pp. 49–61.

______. Amoroso Costa e os postulados de Veblen para a geometria euclidiana. In: LIMA, Rafael P.; GOMES, Rodrigo R.; PANTANO FILHO, Rubens. Ensino de matemática e ciências: temas para reflexão. Salto, SP: Fox Tablet, 2022. p. 2538.

______. A grandeza sai de cena: a história do capítulo que Amoroso Costa decidiu não publicar. Revista Brasileira de História da Ciência, 2024. No prelo.

GONSETH, Ferdinand. *Les fondements des mathématiques*: de la géométrie d'Euclide à la relativité génerale et à l'intuitionisme. Paris: Albert Blanchard, 1974.

HILBERT, David. *Fundamentos da geometria*. Lisboa: Gradiva, 2003.

HUNTINGTON, Edward Vermilye. Definitions of a field by sets of independent postulates. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 4, n. 1, p. 31-37, jan. 1903.

JOURDAIN, Philip Edward Bertrand. Introduction. *In*: CANTOR, Georg Ferdinand Ludwig Philipp. *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. New York: Dover, 1955. p. 1–82.

LAUGWITZ, Detlef. Debates about infinity in mathematics around 1890: the Cantor-Veronese controversy, its origins and its outcome. *NTM Zeitschrift für Geschichte der Wissenschaften, Technik und Medizin*, v. 10, n. 1-3, p. 102–126, set. 2002.

LEVI-CIVITA, Tulio. Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici. Atti del Reale Istituto veneto di scienze, lettere ed arti, s. VII, t. IV, p. 1765–1815, 1892/1893.

MAURAIN, Charles Honoré et al. *Correspondência recebida por Amoroso Costa durante sua estada em Paris e cópia do cartaz das conferências realizadas na Universidade de Paris*. Rio de Janeiro: MAST, 1928.

MOREIRA, Ildeu de Castro. Amoroso Costa e a introdução da relatividade geral no Brasil. *In*: COSTA, Manuel Amoroso. *Introdução à teoria da relatividade*. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1995. pp. xv-xliii.

MOSCOSO, Tobias de Lacerda Martins. O que disse Tobias Moscoso da obra de Amoroso Costa. *Diário Nacional*, São Paulo, ano 2, n. 437, p. 5–6, 5 dez. 1928.

MUSEU DE ASTRONOMIA E CIÊNCIAS AFINS. *Arquivo Amoroso Costa*: inventário sumário. Rio de Janeiro: MAST, 1995. Disponível em: http://zenith.mast.br/c_home.php. Acesso em: 10. Jan. 2021.

NATUCCI, Alpinolo. *Il concetto di numero e le sue estensioni*: studî storico-critici intorno ai fondamenti dell' aritmetica generale con oltre 700 indicazioni bibliografiche. Torino: Fratelli Brocca, 1923.

RAMOS, Theodoro Augusto. *Estudos*: ensino, sciencias physicas e mathematicas. São Paulo: Escolas Profissionais do Liceu Coração de Jesus, 1933.

SANTOS, Arthur Gerhardt. Apontamentos para a biografia de Amoroso Costa. *In*: COSTA, Manuel Amoroso. *As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios*. São Paulo: Grijalbo, 1971. p. 17–25.

SCHOENFLIES, Arthur Moritz. Über die Möglichkeit einer projektiven Geometrie bei transfiniter (nicht archimedischer) Maßbestimmung. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, v. 15, p. 26–41, 1906.

STUDY, Christian Hugo Eduard; CARTAN, Élie Joseph. Nombres complexes. *In*: MOLK, Jules (ed.). *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*. Sceaux: Éditions Jacques Gabay, 1992. t. 1, v. 1, p. 329–468.

SILVA, Clovis Pereira da. *Início e consolidação da pesquisa em matemática no Brasil*. 3. ed. São Paulo: Blücher, 2022.

SUPPO, Hugo Rogelio. A política cultural da França no Brasil entre 1920 e 1940: o direito e o avesso das missões universitárias. *Revista de História*, n. 142–143, p. 309–345, 2000.

VEBLEN, Oswald. The foundations of geometry. *In*: YOUNG, Jacob William Albert. (ed.). *Monographs on topics of modern mathematics relevant to the elementary field*. 2nd. ed. New York: Longmans, Green, and Co., 1924. p. 1–51.

VERONESE, Giuseppe. Il continuo rettilineo e l’assioma V di Archimede. *Atti della Reale Accademia dei Lincei - Memorie della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, v. 6, p. 603–624, 1890.

VERONESE, Giuseppe. *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare*. Padova: Tipografia del Seminario, 1891.

Rodrigo Rafael Gomes
Instituto Federal de São Paulo – IFSP – campus
Bragança Paulista – Brasil

E-mail: rodrafagomes@ifsp.edu.br