

**O INFINITO E O MÉTODO DA DIAGONAL DE CANTOR –
TRADUÇÃO DE *UEBER EINE ELEMENTARE FRAGE DER
MANNIGFALTIGKEITSLEHRE (1890–91)*¹**

Fábio Maia Bertato
*Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência – CLE
Universidade Estadual de Campinas – Unicamp – Brasil*

(aceito para publicação em janeiro de 2023)

Resumo

No presente artigo, apresentamos a tradução ao português e a transcrição alemã do artigo intitulado “*Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*” (1890–91), no qual Cantor introduz o seu famoso “Método da Diagonal”. No ensaio introdutório, fazemos algumas considerações acerca do infinito e dos problemas correlatos, bem como apresentamos alguns elementos para colocar a história do infinito numa perspectiva cultural mais ampla.

Palavras-chave: Infinito, G. Cantor, Método da Diagonal, Tradução.

**[THE INFINITE AND CANTOR’S DIAGONAL METHOD – PORTUGUESE TRANSLATION OF
UEBER EINE ELEMENTARE FRAGE DER MANNIGFALTIGKEITSLEHRE (1890–91)]**

Abstract

In this article, we present the Portuguese translation and the German transcription of the article entitled “*Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*” (1890–91), in which Cantor introduces his famous “Diagonal Method”. In the introductory essay, we make some considerations about infinity and related problems, as well as present some elements to place the history of infinity in a broader cultural perspective.

Keywords: Infinite, G. Cantor, Diagonal Method, Translation.

¹ Dedico este artigo à memória do Prof. Rubens G. Lintz. *Requiescat in pace.*

0. Introdução

“O infinito é difícil”. Devido às grandes polêmicas e paradoxos levantados pelo conceito de infinito ao longo da história, pode-se concluir – parafraseando o provérbio grego, invocado por Sócrates no final do diálogo *Hípias Maior* – que “*χαλεπὰ τὰ ἀπειρα*” (“difíceis são as coisas infinitas”).²

O infinito tem um papel fundamental nas clássicas discussões acerca de vários importantes temas, desde a possibilidade do movimento (v.g. o Paradoxo de Zenão), passando por argumentos céticos acerca do conhecimento (v.g. o Trilema de Agripa) e pelos argumentos a favor da existência de Deus (v.g. as Vias de Tomás de Aquino), até a questão da eternidade e/ou expansão do Universo, entre outros.

Dentre os problemas concernentes ao conceito de infinito, podemos destacar:

- 1 – Como se pode definir o infinito?
- 2 – O infinito existe em ato ou é apenas potencial?
- 3 – Existe um infinito maior do que outro infinito?
- 4 – É possível efetuar operações aritméticas com o infinito?
- 5 – Como resolver os “paradoxos do infinito”?

Como era de se esperar, a bibliografia sobre o infinito é, com o perdão do trocadilho, potencialmente infinita. Foge, portanto do escopo e das possibilidades do presente trabalho uma discussão exaustiva e pormenorizada sobre os problemas indicados acima. É nosso objetivo, porém, fazer algumas singelas contribuições para sua consideração. Como a questão dos “paradoxos do infinito” perpassa os demais problemas, não faremos um tratamento específico sobre ela.

Nas seções a seguir, traçamos um esboço, visando delinear um pano de fundo cultural, para colocar em perspectiva o artigo de Cantor, intitulado “*Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*” (“*Sobre uma questão elementar na teoria dos agregados*, 1890–91), aqui apresentado em tradução e transcrição. Para isso, são apresentados alguns elementos culturais, que incluem discussões de tradições filosófico-teológicas relevantes.

1. Definições do Infinito

Tendo em vista que o infinito é um conceito muito importante para distintas áreas tais como a filosofia, a matemática e a teologia, é de se esperar que alguma confusão tenha se estabelecido durante os séculos sobre a própria noção do que seja dizer que algo é infinito. Tal estado de coisas trouxe muitas questões e problemas para diversas áreas do saber. Uma consequência disso são os “paradoxos” ou “antinomias”, oriundos do tratamento do

² Em *Hípias Maior* a discussão orbita em torno do “belo”, donde a conclusão de Sócrates: “*χαλεπὰ τὰ καλὰ*” (“Difíceis são as coisas belas”, Platão. *Hipp. Maj.* 304e).

infinito. Algumas intuições simplesmente são contrariadas quando se considera a manipulação de grandezas ou atributos infinitos.

Como é bem sabido, Galileu já havia indicado um desses “paradoxos do infinito”. O fato de ser possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números inteiros positivos e um de seus subconjuntos próprios, a saber, o conjunto dos quadrados perfeitos, configurava, a seu ver, um contra-senso. Tal possibilidade de bijeção, denominada “holomerismo” por Steele,³ foi indicada por Bolzano como uma das características fundamentais do infinito.⁴ Em sua obra “*Paradoxien des Unendlichen*” (“*Paradoxos do Infinito*”, PU, 1851), Bolzano se propõe a resolver os paradoxos que se apresentavam até então, mediante uma cuidadosa abordagem do infinito, numa perspectiva que unificava o conceito nas diversas áreas. Todavia, Bolzano segue a tradição de se definir o infinito a partir do finito.⁵

Curiosamente, é exatamente a possibilidade de se estabelecer a referida bijeção, considerada inicialmente como uma antinomia, que, séculos depois, serviria para a definição precisa do conceito de infinito. Coube a Dedekind estabelecer a definição canônica, a partir da propriedade holomérica. Cantor também adota tal postura e, de paradoxal, tal propriedade do infinito passa a ser essencial. Assim, a partir de então, considera-se que *um conjunto é infinito se, e somente se, pode ser colocado em correspondência biunívoca com um de seus subconjuntos próprios*.⁶

2. Infinito em ato ou potencial

Enquanto na cultura grega o infinito era assumido, em geral, apenas no seu caráter potencial,⁷ podemos dizer que na cultura ocidental houve uma forte tendência pela afirmação do infinito atual.⁸ Uma das explicações para tal admissão reside nos símbolos

³ Bolzano, 1950. p. 23.

⁴ Sobre a propriedade holomérica, afirma Bolzano: “*Passemos agora à consideração de uma peculiaridade extremamente notável, que pode ocorrer na relação entre dois conjuntos, quando ambos são infinitos, de fato sempre ocorre, [...]*” [“*Übergehen wir nun zur Betrachtung einer höchst merkwürdigen Eigenheit, die in dem Verhältnisse zweier Mengen, wenn beide unendlich sind, vorkommen kann, ja eigentlich immer vorkommt, [...]*”] (BOLZANO, 1851, PU, §20).

⁵ “[...], chamarei uma multitude que é maior que qualquer outra finita, isto é, uma multitude tal que qualquer conjunto finito é apenas uma parte dela, uma multitude infinita [...]” [“[...] werde ich eine Vielheit, die größer als jede endliche ist, d. h. eine Vielheit, die so beschaffen ist, daß jede endliche Menge nur einen Teil von ihr darstellt, eine unendliche Vielheit nennen”] (BOLZANO, 1851, PU §10).

⁶ Na definição 64 de sua obra “*Was sind und was sollen die Zahlen?*” (“*Que são e para que servem os números?*”, 1888), assim define Dedekind: “*Um sistema S é chamado de infinito, quando ele é similar a uma parte própria de si mesmo; caso contrário, S é chamado de sistema finito*” [“*Ein System S heißt unendlich, wenn es einem echten Theile seiner selbst ähnlich ist; im entgegengesetzten Falle heißt S endliches System*”] (DEDEKIND, 1893, p. 17; 1909, p. 63). Em nota, Dedekind menciona que já havia submetido tal definição para alguns autores, dentre os quais Cantor (em setembro de 1882).

⁷ É bem sabido que a noção de *ἄπειρον* (*ápeiron*, “indefinido”, “ilimitado”, “infinito”) era, para autores gregos, tais como Aristóteles, algo que não poderia ser atual. Isso por lhes parecer uma contradição tal atualização, como se significasse algo ser um “indeterminado determinado”. Por isso, admitia-se na matemática grega a possibilidade de algo ser prolongado indefinidamente, mas sempre em potência, nunca em ato.

⁸ No contexto da tradição cristã, ligada ao contexto matemático, para uma apreciação sobre o papel do infinito no pensamento de Pascal, v. CORTESE, 2023.

primários da cultura de tradição judaico-cristã, posto que um dos atributos do Deus do teísmo clássico é o de ser infinito.⁹ Dessa forma, um infinito em ato existe, posto que Deus existe e é infinito. Esta era, por exemplo, a perspectiva de Bolzano.¹⁰

No que diz respeito ao texto e autor considerados neste artigo, é muito interessante indicar uma importante mudança na abordagem de Cantor com relação ao infinito. Durante boa parte de sua carreira, Cantor tratava o infinito apenas como uma mera representação, ou algo que poderia corresponder à noção usual de infinito potencial. Todavia, a partir de certo ponto, Cantor começou a abordar o infinito como um todo completo e atual,¹¹ e assim desenvolveu a sua teoria sobre os números transfinitos. Entre essas duas etapas, Cantor adquiriu e leu a obra *“Paradoxien des Unendlichen”* de Bolzano, conforme ele mesmo menciona em carta para Dedekind. É um fato bem estabelecido que para Cantor as discussões filosóficas e teológicas sobre Deus tinham uma grande conexão com a sua teoria do infinito. Assim, foi com bons olhos que Cantor viu a defesa da atualidade do infinito efetuada por Bolzano.¹² Apenas para ilustrar como essas dimensões estão relacionadas, consideremos as discussões efetuadas por Bolzano e Dedekind e que constituem provas da existência de algo infinito, pelo menos no domínio das possibilidades. Para isso consideremos o conjunto de todas sentenças verdadeiras em si mesmas. Num tipo de indução, conclui-se que, a partir de uma proposição verdadeira A, pode-se obter uma lei de formação para uma sequência infinita:

A é verdadeira;
 ‘A é verdadeira’ é verdadeira;
 “‘A é verdadeira’ é verdadeira” é verdadeira;
 etc.¹³

Para Bolzano e, provavelmente para Cantor, o conjunto de tais verdades estaria em ato na mente de um Deus onisciente. Donde o infinito em ato ser algo razoável na perspectiva de um teísta clássico. Parece ser um fato muito relevante verificar que por trás de uma assunção sem mais, tal como a efetuada mediante o axioma do infinito na teoria de conjuntos (v.g. ZF), há toda uma história na qual um axioma matemático poderia ser considerado como um corolário de um teorema teológico.¹⁴ De todo modo, perdura uma consideração mais ou menos pragmática de tipo hilbertiano, segundo a qual a admissão da existência de conjuntos infinitos, apesar de não termos evidência alguma do infinito no

⁹ Cf. LINTZ, 1992; e 2017.

¹⁰ Segundo Bolzano, Deus, um “ser real e incondicionado”, é infinito em mais de um sentido. É infinito em seu conhecimento e em sua vontade. Para detalhes ver BERTATO, 2023 e BOLZANO, 1851, PU, §25. Por teísmo clássico, entendemos a posição que admite a existência de um ser supremo, que possui atributos maximais tais como onipotência, onisciência e onibenevolência.

¹¹ Cf. ZELLINI, 1980, p. 194.

¹² Sobre a avaliação de Cantor acerca de algumas das contribuições de Bolzano, v. DAUBEN, 1990, p. 124; SHAPIRO & HELLMAN, 2021, p. 205-206; EWALD, 2005, p. 249; e ZERMELO, 1962, p. 179ss.

¹³ Cf. BOLZANO, 1851, PU, §13; DEDEKIND, 1893, p. 17; 1909, p. 63, nota ao Teorema 66; FERREIRÓS, 2001, p. 245; e SIEG, 2013, p. 63.

¹⁴ Empregamos o termo “teorema teológico” no sentido de uma fórmula derivada (inferida dedutivamente) a partir de outros pressupostos teológicos, dentre os quais, possivelmente, outros teoremas e também postulados, ou ainda, axiomas teológicos.

mundo natural, se justifica devido aos resultados interessantes que são obtidos em decorrência. Por isso, até o momento, ninguém nos expulsou do “Paraíso de Cantor”.¹⁵

3. Um infinito maior que outro

Devido ao mencionado “paradoxo” dos quadrados perfeitos e a outras considerações, Galileu conclui que os conceitos de *menor*, *igual* e *maior* só seriam adequadamente aplicáveis a objetos finitos. Assim, Simplicio e Salviati, personagens de seus *Discorsi*, discorrem sobre a inconveniência de tais conceitos ao infinito:

“Simplicio. Aqui surge de imediato a dúvida, que me parece insolúvel: que estando seguros de encontrar linhas tais que uma seja maior que a outra, sempre que ambas contiverem pontos infinitos, é necessário confessar que encontramos, no mesmo gênero, algo maior que o infinito, porque o infinito dos pontos da linha maior excederá a infinidade dos pontos da menor. Ora, esse dar-se um infinito maior que o infinito me parece um conceito que não pode ser entendido de forma alguma.
Salviati. Estas são aquelas dificuldades que derivam de discorrer que fazemos com nosso intelecto finito sobre infinitos, dando-lhes aqueles atributos que damos às coisas finitas e acabadas; o que eu acho inconveniente, porque estimo que esses atributos de maioridade, minoridade e igualdade não convêm aos infinitos, dos quais não se pode dizer, um ser maior ou menor ou igual ao outro; como prova de que já me ocorreu tal discurso, para uma explicação mais clara, o proporei por interações ao Sr. Simplicio, que levantou a dificuldade.
*Suponho que você saiba muito bem quais números são quadrados e quais não são. [...]”*¹⁶

Fica clara a percepção de Galileu acerca da inconveniência do uso de certas noções comparativas usualmente aplicadas nos casos finitos. Bolzano, por sua vez, não vê problemas no emprego dessas comparações. Para ele, não é contraditório que tenhamos um infinito maior do que o outro. Assim, assevera Bolzano:

¹⁵ Cf. EPSTEIN & CARNIELLI, 2008, p. 51.

¹⁶ *“Simp. Quì nasce subito il dubbio, che mi pare insolubile; & è che sendo noi ficuri trouarfi linee una maggior dell'altra, tutta volta che amendue contenghino punti infiniti bisogna confessare trouarfi medesimo genere una cosa maggior dell'infinito; perche la infinità de i punti della linea maggiore eccederà l'infinità de i punti della minore. Ora questo darfi un'infinito maggior dell'infinito mi par concetto da non poter' effer capito in verun modo.*

Salu. Queste son di quelle difficoltà, che deriuano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno a gl'infiniti, dandogli quelli attributi, che noi diamo alle cose finite, e terminate; il che penso, che fia inconueniente; perche stimo che questi attributi di maggioranza, minorità, & equalità non conuenghino a gl'infiniti, de i quali no si può dire uno effer maggiore, ò minore, ò eguale all'altro; per proua di che già mi fouenne un fi fatto discorso, il quale per più chiara esplicazione proporrò per interrogazioni al S. Simpl. che hà mossa la difficoltà.

Io suppongo che uoi benissimo sappiate, quali sono i numeri quadati e quali i non quadati.” (GALILEU GALILEI, 1654, p. 24).

“Mesmo nos exemplos de infinito considerados até agora, não poderíamos deixar de notar que nem todos os conjuntos infinitos devem ser considerados iguais entre si em relação à sua multiplicidade; mas que alguns deles são maiores (ou menores) que outros, isto é, um inclui o outro como parte (ou, ao contrário, está ele mesmo no outro como mera parte).¹⁷

Assim, para Bolzano, ainda que se possa estabelecer uma bijeção entre um conjunto e uma parte própria sua, a parte ainda é menor que o todo. No exemplo dado por Galileu, o conjunto dos números quadrados perfeitos deveria ser considerado menor que o conjunto dos inteiros positivos. Segundo a sua perspectiva, isso se dá porque os membros (elementos) de cada par formado pela bijeção não exercem exatamente as mesmas relações em seus respectivos conjuntos.¹⁸ Entre as relações não satisfeitas, ele inclui razões geométricas e diferenças aritméticas. Aparentemente, Bolzano considera como “igualdade” (*Gleichheit*) entre conjuntos infinitos um certo tipo de “isomorfismo” estrutural e não apenas o fato de serem equipolentes.¹⁹ No caso galileano, apesar de haver equipolência entre os conjuntos, temos, por exemplo, que as distâncias constantes entre números inteiros positivos sucessivos não se preservam entre os quadrados perfeitos correspondentes. Por isso os dois conjuntos infinitos não podem ser ditos “iguais”.

É interessante notar como a visão de Bolzano sobre o infinito influencia a sua teologia. Na resposta a uma possível objeção contra a divindade de Cristo, apresentada em sua obra *“Lehrbuch der Religionswissenschaft”* (*“Manual de Ciência da Religião”*, LdR, 1834), ele dá a seguinte resposta:

“4. Objeção. Em João 14, 28, Jesus diz com palavras secas: ‘O Pai é maior do que eu’. Se esta declaração não abole a divindade do Filho, pelo menos contradiz a doutrina de que as três Pessoas divinas são de igual dignidade.

Resposta. A divindade do Filho não é de forma alguma abolida por esta passagem; pois ele poderia permanecer uma pessoa divina, um sujeito infinito, e ainda assim ser inferior ao Pai, porque não é inconsistente que um infinito supere o outro. Mas como Jesus aqui obviamente se entende in concreto pelo ‘eu’, esta passagem também não contradiz o ensinamento da igualdade de dignidade das pessoas divinas, pois o Filho

¹⁷ *“Schon bei den bisher betrachteten Beispielen des Unendlichen konnte uns nicht entgehen, daß nicht alle unendliche Mengen in Hinsicht auf ihre Vielheit einander gleich zu achten seien; sondern daß manche derselben größer (oder kleiner) als eine andere sei, d.h. die andere als einen Teil in sich schließe (oder im Gegenteile sich selbst in der andern als bloßer Teil befinde)”* (BOLZANO, 1851, PU, §19).

¹⁸ *“[...] não aparecem exatamente da mesma maneira em seus conjuntos”* “[...] in ihren Mengen nicht ganz in derselben Weise erscheinen”] (BOLZANO, 1851, PU, §23).

¹⁹ Não consta que Bolzano empregue algum termo equivalente a “equipolência”. Usamos aqui essa noção apenas para interpretar as distinções por ele indicadas. No caso de dois modelos para os números inteiros positivos, poder-se-ia dizer, com Bolzano, que eles são “iguais”. Diríamos hoje: iguais a menos de isomorfismo.

de Deus em sua humilhação como ser humano era de fato inferior ao Pai”.²⁰

Dessa forma, podemos ver que “o mais direto precursor da obra de Cantor”²¹ considera totalmente razoável não só a existência atual do infinito mas também que a existência de infinitos de “tamanhos” distintos é bastante natural. Coube, contudo, a Cantor a primeira prova matemática dessa última convicção.

Em seu artigo intitulado “*Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*” (“Sobre uma propriedade do conjunto de todos os números reais algébricos”, 1874), Cantor inaugura a sua teoria do infinito atual.²² Dois principais resultados são apresentados nesse trabalho seminal: (i) que o conjunto dos números reais algébricos ω (e, portanto, também o conjunto dos números racionais \mathbb{Q}) é enumerável; e (ii) nenhum intervalo aberto (α, β) de números reais pode ser enumerado. Como consequência disso, conclui-se que o conjunto dos números reais \mathbb{R} não é enumerável.²³ Todavia, a prova de tal fato é decorrente do método que ficou conhecido como “Diagonal de Cantor” e que foi introduzido no artigo aqui apresentado em tradução e transcrição, conforme será discutido mais abaixo.

4. Operações com o infinito

Após as abordagens das questões relativas à atualidade bem como os novos resultados acerca das cardinalidades de conjuntos infinitos, Cantor pôde estabelecer a sua Teoria de números transfinitos. Dessa forma, responde-se ao problema da possibilidade de se operar com o infinito.²⁴ Além dessa abordagem estritamente matemática, podemos encontrar certas posturas filosófico-teológicas que corroboram para a legitimidade de tal possibilidade e que podem ter influenciado consciente ou inconscientemente nessa discussão.

Considerando-se, por exemplo, a discussão teológica de Bolzano mencionada na seção anterior, teríamos, segundo a doutrina trinitária cristã, três Pessoas divinas idênticas em tudo, exceto no que diz respeito às processões divinas.²⁵ Dessa forma, uma Pessoa

²⁰ “4. *Einwurf. Bei Joh. 14, 28. sagt Jesus mit trockenen Worten: Der Vater ist größer als ich. Wenn diese Aeußerung nicht die Gottheit des Sohnes aufhebt: so widerspricht sie wenigstens der Lehre, daß die drei göttlichen Personen von gleichem Range seyen. Antwort. Die Gottheit des Sohnes wird durch diese Stelle in keinem Falle aufgehoben; indem er immerhin eine göttliche Person, ein unendliches Subject bleiben, und doch geringer als der Vater seyn könnte, weil es nicht ungereimt ist, daß Ein Unendliches das Andere übertreffe. Da aber Jesus hier unter dem Ich offenbar sich in concreto versteht: so widerspricht diese Stelle auch nicht der Lehre vom gleichen Range der göttlichen Personen, denn der Sohn Gottes in seiner Erniedrigung als Mensch war allerdings geringer, denn der Vater*” (BOLZANO, 1834, LdR III, §116).

²¹ Cf. ZELLINI, 1980, p. 188ss.

²² Cf. VENTURI, 2018, p. 63.

²³ A leitura do referido artigo não é trivial, devido tanto à originalidade da abordagem de Cantor, quanto à notação por ele empregada. Para uma apresentação mais amigável de seu conteúdo, v. BRITO & BERTATO, 2023.

²⁴ Para uma cuidadosa apresentação da Teoria dos números transfinitos de Cantor, v. SUPPES, 1960.

²⁵ Na perspectiva latina, o Deus triuno é Pai, Filho e Espírito Santo. As três pessoas divinas são iguais em divindade, mas diferem entre si apenas porque o Filho procede do Pai e o Espírito Santo procede do Pai e do Filho (na teologia ortodoxa oriental, apenas do Pai). Sucintamente, isso significa dizer que o Pai é “Deus conhecendo a

Divina, que é infinita, procede de outra, que também é divina. Em tal contexto, estamos diante de um infinito que é “tirado” de outro, sem que este deixe de ser infinito.

De forma mais explícita, algo similar pode se verificar nas tradições religiosas indianas, tais como a hindu, quando consideramos o seguinte mantra:

*“Esse infinito, este infinito, a partir do infinito, o infinito procede.
Do infinito, o infinito tendo sido tirado, o infinito realmente
permanece”.*²⁶

Apesar da polissemia do conceito de “Purna” (पूर्ण, “infinito”, “plenitude”) e do mantra indicado, estabelece-se em tal contexto religioso a percepção de que a realidade divina seja infinita e que esta, mesmo após a sua ação criadora, permanece inalterada, infinita. Assim, certas “operações” entre o infinito são possíveis e consideradas atuais. Mais uma vez, o matemático e o transcendente se entrelaçam numa coincidência estrutural.

Tais exemplos da tradição filosófico-teológica e mística mostram que no contexto do teísmo clássico a atualidade, variedade de tamanhos e operações com o infinito se apresentam de forma bastante natural. Se tais acepções configuram os símbolos primários, que constituem o pano de fundo metafísico das reflexões matemáticas, como parecer ser o caso de Cantor e de outros autores, não é de se surpreender que, em algum momento, estas maturassem em uma forma expressiva matemática abstrata e bem fundamentada.²⁷ De todo modo, nossos comentários visam apenas assinalar as inter-relações entre os diversos domínios do conhecimento e outros saberes e o desenvolvimento de teorias matemáticas e científicas.

Si mesmo”, o Filho é “o conhecimento de Deus de Si mesmo” e o Espírito Santo é “o amor de Deus entre o Pai e o Filho”. As “processões” têm a ver com um Deus que Se conhece e Se ama.

²⁶ Trata-se do Mantra da Paz (ou do Infinito, ou da Plenitude), invocação presente no *Isha Upanishad (Shukla Yajurveda)*, cuja origem estimada está entre os séculos IV a II a. C:

पूर्णमदः पूर्णमिदं पूर्णात्पूर्णमुदच्यते ।
पूर्णस्य पूर्णमादाय पूर्णमेवावशिष्यते ॥

pūrṇamadaḥ pūrṇamidaṁ pūrṇātpūrṇamudacyate ।
pūrṇasya pūrṇamādāya pūrṇamevāvaśiṣyate ॥

Outra tradução possível, seria:

*Aquele [é] infinito, este [é] infinito, a partir do infinito, o infinito é produzido.
Daquele infinito, este infinito tendo sido puxado, infinito realmente resta.*

²⁷ Cf. LINTZ, 1992; e 2017.

5. O Método da “Diagonal de Cantor”

No que se segue, faremos algumas breves considerações que nos permitirão provar que o conjunto dos números reais não é enumerável. Usaremos conceitos básicos e com notação similar à empregada por Cantor no artigo traduzido e transcrito abaixo.

Tal abordagem tem por objetivo facilitar a leitura do texto original de Cantor, bem como evidenciar que, apesar de o método da diagonal ser tradicionalmente aplicado na discussão da não-enumerabilidade do conjunto dos números reais, Cantor oferece uma prova de um teorema muito mais abrangente. De fato, a sua abordagem mostra uma originalidade e genialidade dignas de nota, como veremos a seguir.

Partamos do emprego do termo *lista* como conceito primitivo.²⁸ Uma *sequência de v termos* é uma lista (x_1, x_2, \dots, x_v) de v objetos, em que $v \in \mathbb{Z}_+^*$. Uma sequência de v termos é dita uma *sequência finita*. Uma *sequência infinita* é uma lista $(x_1, x_2, \dots, x_v, \dots)$ de objetos, com um objeto associado para cada $v \in \mathbb{Z}_+^*$.

Uma *enumeração* para um conjunto M é uma sequência tal que todo termo x_v é elemento de M e todo elemento de M é um termo x_v , para algum v . Um conjunto M nessas condições é dito *enumerável*.

Com essas definições estabelecidas, podemos provar os seguintes teoremas:

Teorema 1. *Sejam M e N conjuntos, tais que $M \subseteq N$. Se N é enumerável, então M é enumerável.*

Prova. Suponhamos que N seja um conjunto enumerável. Então, existe uma enumeração para N . Eliminar de tal enumeração os elementos de N que não sejam elementos de M nos fornece uma lista que é uma enumeração para M . Logo, M é enumerável.

Teorema 2. *O conjunto dos números reais \mathbb{R} não é enumerável.*

Prova. Para obter o resultado esperado, provemos que existe um subconjunto de números reais que não é enumerável.

Seja $M = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x < 1\}$. Todo elemento x de M é um número decimal próprio. Então, todo elemento x de M pode ser associado a uma sequência infinita $E_x = (x_1, x_2, \dots, x_v, \dots)$, em que x_v é a v -ésima casa decimal de x .

Se x é um decimal finito, com n casas decimais, então para $v \geq n + 1$, tomemos $x_v = 0$. Assim, para um decimal finito arbitrário x em M , a sequência associada tem a forma geral $E_x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, 0, 0, \dots)$.

Se x é uma dízima periódica, cujo algarismo que se repete a partir da $(n + 1)$ -ésima casa decimal é o 9, antecedido pelo algarismo k na n -ésima casa, então convencionemos

²⁸ Ademais do sentido intuitivo, como uma lista, podemos definir *sequência* como uma função cujo domínio é um intervalo de números reais inteiros positivos.

associa-lo à sequência E_x , tal que $x_v = 0$, para $v \geq n + 1$ e $x_n = k + 1$. Por exemplo, se $x = 0,12379999\dots$, então $E_x = (1, 2, 3, 8, 0, 0, 0, 0, \dots)$.²⁹

Com isso estabelecido, procedamos à prova de que M não é enumerável. Suponhamos, por absurdo, que M seja enumerável. Então, M admite uma enumeração de seus elementos que pode ser facilmente obtida a partir de uma sequência de sequências na forma:

$$\begin{aligned} E_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1v}, \dots), \\ E_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2v}, \dots), \\ &\vdots \\ E_\mu &= (a_{\mu 1}, a_{\mu 2}, \dots, a_{\mu v}, \dots), \\ &\vdots \end{aligned}$$

em que cada $a_{\mu v}$ é um dos números naturais no intervalo $[0,9]$, correspondentes aos algarismos usados nos dígitos dos decimais considerados, de acordo com o estabelecido acima.

Definamos agora a sequência

$$E_0 = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_v, \dots),$$

tal que

$$b_v = \begin{cases} 0, & \text{se } a_{vv} = 1 \\ 1, & \text{se } a_{vv} \neq 1. \end{cases}$$

Então, temos que $b_v \notin a_{vv}$, para todo v . Portanto, b_v é um elemento de M que não está na sequência considerada. Mas, isso é um absurdo, porque tal sequência de sequência deveria nos prover com uma enumeração para M . Logo, M não é enumerável.

Pela contra-positiva do Teorema 1, \mathbb{R} não é enumerável.

É possível notar que, em seu artigo, Cantor obtém um resultado mais geral que o indicado pelo Teorema 2. Ademais, tal consideração mostra que a prova que apresentamos acima pode ser muito mais simples. Cantor considera um conjunto M cujos elementos são sequências infinitas. Supostamente, tal conjunto contém todas as combinações possíveis de dois elementos distintos, representados por m e n . Porém, é possível construir uma sequência b , que se distingue “na diagonal” de todas as demais sequências. Então, temos uma sequência que uma combinação infinita dos elementos m e n e que não está na lista de todas as sequências. Mas, isso é contraditório. Portanto, não se pode obter uma sequência com todas as combinações infinitas de dois elementos distintos. Para a prova do Teorema 2, portanto, bastaria tomarmos como subconjunto de \mathbb{R} ou do intervalo $[0,1)$, o conjunto formado por todas as combinações infinitas de, digamos, 0 e 1, o que seria muito mais econômico e direto.

²⁹ Essa convenção é apenas para que tenhamos uma única representação para números em M , por uma questão de simplicidade para a enumeração. Note-se, porém, que segundo a definição de enumeração apresentada, poderia ser o caso de um elemento de M constar como termo na sequência repetidas vezes.

E ainda mais, como o próprio Cantor observa em seu artigo, o método pode ser estendido ao teorema que afirma que a cardinalidade dos conjuntos bem definidos não tem máximo, ou seja, para todo conjunto L , pode-se determinar um conjunto M , com cardinalidade maior do que L .

6. Agradecimentos

Agradeço ao João Cortese pela cuidadosa leitura da versão prévia deste artigo e pelas valiosas sugestões.

Bibliografia

BERTATO, F. M. *Bolzano on God as the ground of the existence of the actual infinite*. 2023. *No prelo*.

BERTATO, F. M. Philosophical Approaches to the Foundations of Logic and Mathematics: In Honor of Professor Stanisław Krajewski. Review. *History and Philosophy of Logic*, págs. 1–3, 2022. <<https://doi.org/10.1080/01445340.2022.2083906>>.

BOLZANO, B. *Lehrbuch der Religionswissenschaft*. 3 Vol. Sulzbach: Seidel, 1834.

BOLZANO, B. *Paradoxien des Unendlichen*. Leipzig: C. H. Reclam Sen, 1851.

BOLZANO, B. *Paradoxes of the Infinite*. Transl. Donald A. Steele. London: Routledge and Kegan Paul, 1950.

BOLZANO, B. *Las Paradojas del Infinito*. Transl. Luis Felipe Segura. Mexico: Mathema, 2005.

BRITO, A.; BERTATO, F. M. Infinito e enumerabilidade: uma apresentação do trabalho inaugural de Cantor. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 2023. *No Prelo*.

CANTOR, G. Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Vol. 77, págs. 258–262. 1874.

CANTOR, G. Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. 1890–91. In: ZERMELO, E. *Georg Cantor: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Hildesheim: Olms, págs. 278–281, 1962.

CANTOR, G. Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. *Jahresbericht der Deutsch. Math. Vereinig.* Vol. I, págs. 75–78, 1890–91.

CORTESE, J. *Infini et disproportion chez Pascal*. Paris: Honoré Champion, 2023.

DAUBEN, J. W. *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1990.

DAVENPORT, A. *Measure of a different greatness: The intensive infinite, 1250–1560*. Leiden: Brill, 1999.

DEDEKIND, R. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn, 1893.

DEDEKIND, R. *Essays on the Theory of Numbers*: I. Continuity and Irrational Numbers: II. The Nature and Meaning of Numbers. Trad. Wooster Woodruff Beman. Chicago: The Open Court Publ. Co., 1909.

EPSTEIN, R. L.; CARNIELLI, W. A. *Computability. Computable Functions, Logic, and the Foundations of Mathematics*, 3rd Edition. Socorro, New Mexico: Advanced Reasoning Forum, 2008.

EWALD, W. B. *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*. Volume 1. Oxford: Oxford University Press, 2005.

FERREIRÓS, J. *Labyrinth of Thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*. Basel, Boston: Birkhäuser Verlag, 2001.

GALILEU GALILEI. *Discorsi, e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuoue scienze, Attenenti alla Mecanica, & i Mouimenti Locali*. Bologna: HH de Dozza, 1654.

LINTZ, R. G. Considerações Gerais sobre a Filosofia da História e sua Influência na Evolução das Formas Matemáticas. *Bolema*, Rio Claro – SP, v. 7, n. ESPECIAL 2, pp. 84–92, 1992.

LINTZ, R. G. *História da Matemática*. 2 Vols. (45 e 46 da Coleção CLE). Campinas: CLE, 2017.

MURAWSKI, R. On the Reception of Cantor's Theory of Infinity (Mathematicians vs. Theologians). In: *Philosophical Approaches to the Foundations of Logic and Mathematics: In Honor of Professor Stanisław Krajewski*. Poznań Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities, 114. Leiden, The Netherlands, Brill/Rodopi, 2021.

PARIKH, J. *Ten Primary Upanishads: Word-for-Word Translation from Sanskrit*. [sl]: Notion Press, 2022.

PLATÃO. *Diálogos*. Vol. I. Madrid: Gredos, 1993.

SHAPIRO, S.; HELLMAN, G. T. *The History of Continua: Philosophical and Mathematical Perspectives*. Oxford: Oxford University Press, Year: 2021.

SIEG, W. *Hilbert's Programs and Beyond*. Oxford: Oxford University Press, 2013.

SUPPES, P. *Axiomatic Set Theory*. Princeton: D. Vand Nostrand, 1960.

SWEENEY, L. *Divine Infinity in Greek and Medieval Thought*. New York: Peter Lang, 1992.

VENTURI, G. Cantor E L'infinito. *Lett. Mat. Pristem* 107, 61–69, 2018. <https://doi.org/10.1007/s10031-018-0038-x>.

ZELLINI, P. *Breve storia dell'infinito*. Milano: Adelphi, 1980.

ZERMELO, E. *Georg Cantor: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Hildesheim: Olms, 1962.

Fábio Maia Bertato

Centro de Lógica, Epistemologia e História da
Ciência – CLE
Universidade Estadual de Campinas – Unicamp

E-mail: fbertato@unicamp.br

7. Tradução

Sobre uma questão elementar na teoria dos agregados

por

Georg Cantor (Halle an der Saale)

No ensaio intitulado “Sobre uma propriedade do conjunto [*Inbegriff*] de todos os números algébricos reais” (*Journ. Für Math.* Vol. 77, p. 258) encontra-se, provavelmente pela primeira vez, uma prova da proposição de que existem agregados [*Mannigfaltigkeiten*]³⁰ infinitos que não podem ser associados univocamente com a totalidade [*Gesamtheit*] de todos os números inteiros finitos 1, 2, 3, ..., v , ..., ou, como costume expressar, não possuem a potência da série de números 1, 2, 3, ..., v , Do que foi provado no § 2, segue-se imediatamente que, por exemplo, a totalidade de todos os números reais de qualquer intervalo ($\alpha \dots \beta$) não pode ser representado na forma da série:³¹

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v, \dots$$

No entanto, uma prova muito mais simples para esse teorema pode ser fornecida, e que não depende da consideração dos números irracionais.

Sejam, nomeadamente, m e w quaisquer dois caracteres mutuamente exclusivos, então consideremos um conjunto [*Inbegriff*] M de elementos

$$E = (x_1, x_2, \dots, x_v, \dots),$$

[76] que depende das infinitas coordenadas $x_1, x_2, \dots, x_v, \dots$, tal que cada uma dessas coordenadas é m ou w . Seja M a totalidade [*Gesamtheit*] de todos os elementos E .

Os elementos de M incluem, por exemplo, os três seguintes:

$$E^I = (m, m, m, m, \dots),$$

$$E^{II} = (w, w, w, w, \dots),$$

$$E^{III} = (m, w, m, w, \dots).$$

Eu afirmo que tal agregado [*Mannigfaltigkeit*] M não possui a potência da série 1, 2, ..., v ,

Isso decorre da seguinte proposição:

³⁰ O termo “*Mannigfaltigkeit*” é empregado atualmente para designar em alemão o que em português denominamos “variedade”. Não é bem esse o sentido utilizado por Cantor, por isso optamos por traduzi-lo por “agregado”. Os demais termos alemães associados com “coleções” são indicados entre colchetes, após os termos que os traduzem.

³¹ Cf. BRITO & BERTATO, 2023.

“Se $E_1, E_2, \dots, E_v, \dots$ é uma série qualquer simplesmente infinita [*einfach unendliche*] de elementos do agregado [*Mannigfaltigkeit*] M , então sempre existe um elemento E_0 de M , que não coincide com nenhum E_v .”

Para a prova, seja:

$$\begin{aligned} E_1 &= (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,v}, \dots), \\ E_2 &= (a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,v}, \dots), \\ &\dots \dots \dots \\ E_\mu &= (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \dots, a_{\mu,v}, \dots). \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Aqui os $a_{\mu,v}$ são de determinado modo m ou w . Seja uma série $b_1, b_2, \dots, b_v, \dots$ definida de tal forma que b_v seja igual a m ou a w , mas diferente de $a_{v,v}$.

Assim, se $a_{v,v} = m$, então $b_v = w$, e se $a_{v,v} = w$, então $b_v = m$.

Se considerarmos então o elemento

$$E_0 = (b_1, b_2, b_3, \dots)$$

de M , então pode-se ver facilmente que a equação

$$E_0 = E_\mu$$

não pode ser satisfeita por qualquer valor inteiro positivo de μ , pois, caso contrário, para o μ em questão e para todos os valores inteiros de v :

$$b_v = a_{\mu,v},$$

assim seria também em particular:

$$b_\mu = a_{\mu,\mu},$$

o que pela definição de b_v é excluído. Segue-se imediatamente deste teorema que a totalidade de todos os elementos de M não pode ser colocada na forma da série $E_1, E_2, \dots, E_v, \dots$, pois, de outro modo, estaríamos diante da contradição de que uma coisa E_0 seria tanto um elemento de M , quanto também não seria um elemento de M .

Esta prova é notável não apenas por sua grande simplicidade, [77] mas também porque o princípio seguido pode ser facilmente estendido ao teorema geral de que a potência de agregados [*Mannigfaltigkeiten*] bem definidos não tem máximo, ou, o que é o mesmo, que todo agregado [*Mannigfaltigkeit*] L dado pode ser colocado ao lado de outro M , com potência maior do que L .

Por exemplo, seja L um contínuo linear, tal como o conjunto [*Inbegriff*] de todos os números reais z que são ≥ 0 e ≤ 1 .

M é entendido como o conjunto [*Inbegriff*] de todas as funções únicas $f(x)$ que assumem apenas os dois valores 0 ou 1, enquanto x percorre todos os valores reais que são ≥ 0 e ≤ 1 .

M não ser menor em potência do que L decorre do fato de ser possível especificar subconjuntos [*Teilmengen*] de M com a mesma potência de L, e.g. o subconjunto que consiste em todas as funções de x que têm o valor 1 para um único valor x_0 de x e o valor 0 para todos os outros valores de x .

No entanto, M não tem a mesma potência de L, pois, caso contrário, o agregado [*Mannigfaltigkeit*] M poderia ser colocado em relação unívoca com a variável z , e M poderia ser pensado na forma de uma função única de duas variáveis x e z :

$$\varphi(x, z),$$

tal que, através de cada especialização de z , um elemento $f(x) = \varphi(x, z)$ de M é obtido e, inversamente, todo elemento $f(x)$ de M emerge de $\varphi(x, z)$ através de uma única especialização particular de z . Mas isso leva a uma contradição. Pois, se $g(x)$ é entendido como aquela única função de x que só assume os valores 0 ou 1 e é diferente de $\varphi(x, x)$, para cada valor de x , então, por um lado $g(x)$ é um elemento de M, e, por outro lado, $g(x)$ não pode surgir de $\varphi(x, z)$ por uma especialização $z = z_0$, porque $\varphi(z_0, z_0)$ é diferente de $g(z_0)$.

Assim, se a potência de M não é nem menor nem igual ao de L, segue-se que é maior que a potência de L. (vide *Crelle's Journal*, Vol. 84, p. 242.)

Já mostrei nos “Fundamentos de uma teoria geral dos agregados” (Leipzig 1883; *Math. Ann.* Vol. 21), usando meios completamente diferentes, que as potências não têm um máximo; lá também foi provado que o conjunto [*Inbegriff*] de todas as potências, se pensarmos nelas como ordenadas de acordo com seu tamanho, forma um “conjunto bem ordenado” [„*wohlgeordnete Menge*“], de modo que na natureza, para cada potência, existe uma próxima maior [78], mas também para cada conjunto [*Menge*] infinitamente crescente de potências, segue-se um próximo maior.

As “potências” representam a única e necessária generalização dos “números cardinais” finitos. Nada mais são do que os números cardinais atuais infinitamente grandes, e têm a mesma realidade e determinação que aqueles; apenas que as relações legítimas entre eles, a “teoria dos números” relativa a eles, é em parte diferente daquela no domínio do finito.

O desenvolvimento deste campo é uma tarefa para o futuro.

* * *

8. Transcrição do texto original

Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre

Von
Georg Cantor (Halle a. S.)

In dem Aufsätze, betitelt: Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen (Journ. für Math. Bd. 77, S. 258), findet sich wohl zum ersten Male ein Beweis für den Satz, dass es unendliche Mannigfaltigkeiten giebt, die sich nicht gegenseitig eindeutig auf die Gesamtheit aller endlichen ganzen Zahlen 1, 2, 3, ..., v, ... beziehen lassen, oder, wie ich mich auszudrücken pflege, die nicht die Mächtigkeit der Zahlenreihe 1, 2, 3, ..., v, ... haben. Aus dem in § 2 Bewiesenen folgt nämlich ohne weiteres, dass beispielsweise die Gesamtheit aller reellen Zahlen eines beliebigen Intervalles ($\alpha \dots \beta$) sich nicht in der Reihenform:

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v, \dots$$

vorstellen lässt.

Es lässt sich aber von jenem Satze ein viel einfacherer Beweis liefern, der unabhängig von der Betrachtung der Irrationalzahlen ist.

Sind nämlich m und w irgend zwei einander ausschliessende Charaktere, so betrachten wir einen Inbegriff M von Elementen:

$$E = (x_1, x_2, \dots, x_v, \dots),$$

[76] welche von unendlich vielen Coordinaten $x_1, x_2, \dots, x_v, \dots$ abhängen, wo jede dieser Coordinaten entweder m oder w ist. M sei die Gesamtheit aller Elemente E.

Zu den Elementen von M gehören beispielsweise die folgenden drei:

$$E^I = (m, m, m, m, \dots),$$

$$E^{II} = (w, w, w, w, \dots),$$

$$E^{III} = (m, w, m, w, \dots).$$

Ich behaupte nun, dass eine solche Mannigfaltigkeit M nicht die Mächtigkeit der Reihe 1, 2, ..., v, ... hat.

Dies geht aus folgendem Satze hervor:

„Ist $E_1, E_2, \dots, E_v, \dots$ irgend eine einfach unendliche Reihe von Elementen der Mannigfaltigkeit M, so giebt es stets ein Element E_0 von M, welches mit keinem E_v übereinstimmt.“

Zum Beweise sei:

$$E_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,v}, \dots),$$

$$E_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,v}, \dots),$$

• • • • •

$$E_\mu = (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \dots, a_{\mu,v}, \dots).$$

• • • • •

Hier sind die $a_{\mu,v}$ in bestimmter Weise m oder w . Es werde nun eine Reihe $b_1, b_2, \dots, b_v, \dots$, so definiert, dass b_v auch nur gleich m oder w und von $a_{\mu,v}$ verschieden sei.

Ist also $a_{\mu,v} = m$, so ist $b_v = w$, und ist $a_{\mu,v} = w$, so ist $b_v = m$.

Betrachten wir alsdann das Element:

$$E_0 = (b_1, b_2, b_3, \dots)$$

von M , so sieht man ohne weiteres, dass die Gleichung:

$$E_0 = E_\mu$$

für keinen positiven ganzzahligen Wert von μ erfüllt sein kann, da sonst für das betreffende μ und für alle ganzzahligen Werte von v :

$$b_v = a_{\mu,v},$$

also auch im besondern:

$$b_\mu = a_{\mu,\mu}$$

wäre, was durch die Definition von b_v ausgeschlossen ist. Aus diesem Satze folgt unmittelbar, dass die Gesamtheit aller Elemente von M sich nicht in die Reihenform: $E_1, E_2, \dots, E_v, \dots$ bringen lässt, da wir sonst vor dem Widerspruch stehen würden, dass ein Ding E_0 sowohl Element von M , wie auch nicht Element von M wäre.

Dieser Beweis erscheint nicht nur wegen seiner großen Einfachheit, [77] sondern namentlich auch aus dem Grunde bemerkenswert, weil das darin befolgte Princip sich ohne weiteres auf den allgemeinen Satz ausdehnen lässt, dass die Mächtigkeiten wohldefinierter Mannigfaltigkeiten kein Maximum haben oder, was dasselbe ist, dass jeder gegebenen Mannigfaltigkeit L eine andere M an die Seite gestellt werden kann, welche von stärkerer Mächtigkeit ist als L .

Sei beispielsweise L ein Linearcontinuum, etwa der Inbegriff aller reellen Zahlgrößen z , die ≥ 0 und ≤ 1 sind.

Man verstehe unter M den Inbegriff aller eindeutigen Functionen $f(x)$, welche nur die beiden Werte 0 oder 1 annehmen, während x alle reellen Werte, die ≥ 0 und ≤ 1 sind, durchläuft.

Dass M keine kleinere Mächtigkeit hat als L , folgt daraus, dass sich Teilmengen von M angeben lassen, welche dieselbe Mächtigkeit haben, wie L , z. B. die Teilmenge, welche aus allen Functionen von x besteht, die für einen einzigen Wert x_0 von x den Wert 1, für alle andern Werte von x den Wert 0 haben.

Es hat aber auch M nicht gleiche Mächtigkeit mit L , da sich sonst die Mannigfaltigkeit M in gegenseitig eindeutige Beziehung zu der Veränderlichen z bringen

liesse, und es könnte M in der Form einer eindeutigen Function der beiden Veränderlichen x und z :

$$\varphi(x, z)$$

gedacht werden, so dass durch jede Specialisirung von z ein Element $f(x) = \varphi(x, z)$ von M erhalten wird und auch umgekehrt jedes Element $f(x)$ von M aus $\varphi(x, z)$ durch eine einzige bestimmte Specialisirung von z hervorgeht. Dies führt aber zu einem Widerspruch. Denn versteht man unter $g(x)$ diejenige eindeutige Function von x , welche nur die Werte 0 oder 1 annimmt und für jeden Wert von x von $\varphi(x, x)$ verschieden ist, so ist einerseits $g(x)$ ein Element von M , andererseits kann $g(x)$ durch keine Specialisirung $z = z_0$ aus $\varphi(x, z)$ hervorgehen, weil $\varphi(z_0, z_0)$ von $g(z_0)$ verschieden ist.

Ist somit die Mächtigkeit von M weder kleiner noch gleich derjenigen von L , so folgt, dass sie grösser ist als die Mächtigkeit von L . (Vgl. Crelle's Journal, Bd. 84, S. 242.)

Ich habe bereits in den „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre“ (Leipzig 1883; Math. Ann. Bd. 21) durch ganz andere Hilfsmittel gezeigt, dass die Mächtigkeiten kein Maximum haben; dort wurde sogar bewiesen, dass der Inbegriff aller Mächtigkeiten, wenn wir letztere ihrer Grösse nach geordnet denken, eine „wohlgeordnete Menge“ bildet, so dass es in der Natur zu jeder Mächtigkeit eine nächst grössere [78] giebt, aber auch auf jede ohne Ende steigende Menge von Mächtigkeiten eine nächst grössere folgt.

Die „Mächtigkeiten“ repräsentieren die einzige und notwendige Verallgemeinerung der endlichen „Cardinalzahlen“, sie sind nichts anderes als die actual-unendlich-grossen Cardinalzahlen, und es kommt ihnen dieselbe Realität und Bestimmtheit zu, wie jenen; nur dass die gesetzmässigen Beziehungen unter ihnen, die auf sie bezügliche „Zahlentheorie“ zum Teil eine andersartige ist, wie im Gebiete des Endlichen.

Die weitere Erschliessung dieses Feldes ist Aufgabe der Zukunft.

* * *