Revista Brasileira de História da Matemática - Vol.23, nº 47 – pp. 55–68
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

INFINITO E ENUMERABILIDADE: UMA APRESENTAÇÃO DO TRABALHO INAUGURAL DE CANTOR

Abner Brito
Instituto Federal do Paraná - IFPR – Paraná, Brasil

Fábio Bertato
Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência – CLE
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP – Brasil

(aceito para publicação em agosto de 2023)

Resumo

No presente artigo, realizamos uma exposição do artigo "*Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*", de Cantor (1874). Para tanto, buscamos nos manter fiéis ao desenvolvimento realizado por Cantor, ao mesmo tempo em que atualizamos a terminologia e incluímos exemplos, com o objetivo de simplificar a compreensão do argumento pelo leitor contemporâneo.

Palavras-chave: Enumerabilidade; Infinito; Cantor.

[INFINITY AND ENUMERABILITY: A PRESENTATION OF CANTOR'S INAUGURAL WORK]

Abstract

In the present article we expose the article "*Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*", by Cantor (1874). We have attempted to keep Cantor's developments while using current language and including examples, aiming at making the argument clearer to the contemporary reader.

Keywords: Countability; Infinite; Cantor.

1. Introdução

Na matemática contemporânea, é amplamente aceito que há diferentes tipos de infinito. Há o infinito enumerável, representado pelos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, e o infinito não enumerável, representado por $\mathbb{R}$. Por exemplo, em teoria da medida, considerando a σ-álgebra de Borel, construída sobre $\mathbb{R}$ e a medida de Lebesgue, qualquer subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$ possui medida nula (ROYDEN, 1988, cap. 3).

Muito do nosso conhecimento sobre o infinito se deve ao trabalho de Georg Cantor. Possivelmente, o chamado *argumento diagonal* de Cantor, apresentado em CANTOR (1854–1918), 1891 seja a demonstração mais conhecida de que $\mathbb{R}$ não é enumerável, devido à simplicidade da demonstração. Entretanto, conforme mencionado pelo próprio Cantor no artigo em questão, possivelmente a primeira demonstração da não enumerabilidade de $\mathbb{R}$ seja aquela apresentada no artigo cujo título pode ser traduzido como "Sobre uma propriedade da classe de todos os números reais algébricos" (CANTOR, 1874).

Nosso objetivo no presente texto é o de apresentar as ideias presentes na primeira demonstração publicada por Cantor quanto à não enumerabilidade de $\mathbb{R}$. Para tanto, procuramos apresentar os argumentos de maneira mais próxima à notação matemática contemporânea, acrescentando exemplos para ilustrar as ideias apresentadas e justificando algumas passagens que, para Cantor, não demandavam maiores explicações, mas que talvez requeiram um grau maior de esforço por parte do leitor contemporâneo.

2. Apresentação

Em termos da organização do artigo, Cantor apresenta uma sessão introdutória na qual ele se utiliza da noção de número real algébrico e apresenta as ideias que serão demonstradas a seguir. Na sessão §1, Cantor demonstra que a coleção dos números reais algébricos é enumerável. Na sessão §2, é apresentada uma demonstração de que qualquer intervalo aberto em $\mathbb{R}$ não pode ser enumerado. Para tanto, buscamos seguir a sequência apresentada por Cantor, complementando conforme julgamos relevante.

Vale mencionar que algumas expressões (como *enumerável*) e símbolos (como $\mathbb{R}$) ainda não haviam sido criados e/ou não são utilizados por Cantor. Entretanto, por se tratar de uma apresentação para o leitor contemporâneo, fizemos uso eventual de tais expressões e símbolos.

2.1 Números reais algébricos

O artigo se inicia com a definição de número real algébrico, que será muito utilizada posteriormente.

Definição 2.1 *Um* número real algébrico *é uma solução de uma equação polinomial da forma*[1]

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \ , \tag{1}$$

em que os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ *são números inteiros.*

Os números reais algébricos incluem os números racionais, bem como diversos números irracionais.

Exemplo 2.2 Os itens abaixo constituem uma lista (não exaustiva) de números reais algébricos.

- **(a)** Qualquer número racional. De fato, se q é um número racional, então existem números inteiros a, b tais que $q = \frac{a}{b}$. Neste caso, q é a solução de $b\omega - a = 0$. Uma vez que todo número racional é um número real algébrico, a classe dos números reais algébricos é densa em $\mathbb{R}$, ou seja, qualquer vizinhança de qualquer ponto na reta possui números reais algébricos.
- **(b)** Raízes quadradas de números naturais. De fato, se a é um número natural, então $\pm\sqrt{a}$ são as raízes da equação $\omega^2 - a = 0$. De modo análogo, considerando as raízes de $b\omega^2 - a = 0$, temos as raízes quadradas de números racionais positivos.
- **(c)** Raízes n-ésimas de números naturais. De modo análogo ao caso anterior, bastando considerar a equação $\omega^n - a = 0$.

Observe que um mesmo número algébrico pode ser solução de diversas equações polinomiais da forma (1). Por exemplo, o número 3 é solução de cada uma das equações a seguir.

$$\begin{aligned} \omega - 3 &= 0 & -\omega + 3 &= 0 \\ 2\omega - 6 &= 0 & \omega^2 - 4\omega + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Com o objetivo de poder associar cada número real algébrico a uma única equação da forma (1), Cantor impõe as seguintes restrições sobre a construção de equações algébricas.

1. $n > 0$. Deste modo, vamos considerar somente equações nas quais efetivamente haja uma incógnita ω.

[1] Mantivemos o uso de ω como incógnita da equação, conforme o artigo de Cantor.

2. $a_0 > 0$. Não queremos $a_0 = 0$, pois neste caso o grau do polinômio em questão seria $n-1$ em vez de n. Além disso, observe que ambas as equações abaixo possuem exatamente as mesmas soluções.

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \ ,$$
$$-a_0\omega^n - a_1\omega^{n-1} - \cdots - a_n = 0 \ .$$

Assim, a restrição de que $a_0 > 0$ corresponde a escolher somente uma das equações de cada par como os apresentados acima. Com isso, nenhum número real algébrico se perde. Observe que, como a_0 é inteiro, $a_0 > 0$ implica $a_0 \geq 1$.

3. Os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ não têm fatores comuns. Isto é equivalente a afirmar que os coeficientes têm máximo divisor comum igual a 1, ou que são primos entre si, ou ainda que não são todos divisíveis por um mesmo número inteiro maior que 1. Isto não exclui a possibilidade de que mais de um coeficiente de (1) seja igual a 1. Em vez disso, o que não se admite são equações tais como

$$2\omega^2 - 8\omega + 6 = 0 \ ,$$

pois todos os coeficientes são múltiplos de 2. Assim, ao dividir esta equação por 2, temos

$$\omega^2 - 4\omega + 3 = 0 \ ,$$

que possui exatamente as mesmas soluções da equação anterior.

4. A equação é irredutível. Isto significa que o polinômio da equação não pode ser descrito como produto de outros polinômios (de menor grau) com coeficientes inteiros. Assim, por exemplo, não se deve considerar a equação

$$\omega^2 - 1 = 0 \ ,$$

pois

$$\omega^2 - 1 = (\omega - 1)(\omega + 1) \ .$$

Deste modo, um número real algébrico que seja solução de uma dada equação não poderá ser solução de outra equação de grau superior.
Observe ainda que, para que a equação (1) seja irredutível, é uma condição necessária, mas não suficiente, que o coeficiente a_n seja diferente de 0 (zero) quando a equação é diferente de $\omega = 0$. Necessária, pois a_n é o termo independente. Assim, se $a_n = 0$, é possível colocar ω em evidência na equação[2].

O objetivo das restrições acima é o de garantir que cada número real algébrico será solução de uma, e somente uma equação da forma (1). Observe que, de acordo com

[2] Por exemplo, a equação $\omega^2 + \omega = 0$ pode ser reescrita como $\omega(\omega + 1) = 0$, justamente por não haver termo independente.

o Exemplo, todos os números racionais são soluções de equações polinomiais de grau 1 com coeficientes inteiros. Portanto, com as restrições acima, equações polinomiais de grau maior que 1 devem ter somente raízes irracionais.

Com a definição e as restrições acima apresentadas, ao final da seção introdutória Cantor afirma que, dado um número real algébrico, a equação (1) satisfeita por aquele número está bem definida. Assim, Cantor dispõe das ferramentas necessárias para demonstrar que é possível colocar a classe dos números reais algébricos, denotada por (ω), em correspondência biunívoca com a classe dos números inteiros positivos, denotada por (ν).[3] Como Cantor afirma, a existência de uma tal correspondência é surpreendente, uma vez que os números reais algébricos são densos em $\mathbb{R}$.[4]

Assim, Cantor esclarece o que será apresentado na sequência do artigo. Na seção §1, será construída a correspondência entre (ω) e (ν). Na seção §2, Cantor passará à demonstração de que, dados qualquer sequência da forma

$$\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu, ... \tag{2}$$

com elementos distintos, e qualquer intervalo aberto (α, β), é possível encontrar números η do intervalo que não pertençam à sequência (2). Assim, como diz Cantor, há uma diferença clara entre o contínuo $(\mathbb{R})$ e (ω). Será demonstrada, pela primeira vez, que os números reais não são enumeráveis.

2.2 A classe (ω) dos números reais algébricos é enumerável (§1)

Como mencionado anteriormente, cada número real algébrico será solução de uma, e somente uma equação da forma (1). Assim, a cada equação (1), Cantor associa o número

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + ... + |a_n| \ , \tag{3}$$

chamado *altura* da equação. Como cada número real algébrico está associado a somente uma equação (1), cada número real algébrico tem uma altura N bem definida. Assim, diremos que N será a *altura* de ω. Em contrapartida, cada N tem uma quantidade finita de números reais ω associados.

Exemplo 2.3 Abaixo são apresentadas, para os primeiros valores de N, as equações e os números reais algébricos que têm altura N, correspondendo a cada equação.

---

[3] Ou seja, existe uma bijeção entre (ω) e (ν).

[4] Embora o termo *denso* ainda não seja utilizado, Cantor menciona o fato de que, dados um número real arbitrário α e uma vizinhança arbitrária de α, existem infinitos elementos de (ω) nesta vizinhança.

N	Equação	ω
1	$\omega = 0$	0
2	$\omega + 1 = 0$	-1
	$\omega - 1 = 0$	1
3	$\omega + 2 = 0$	-2
	$\omega - 2 = 0$	2
	$2\omega - 1 = 0$	$\frac{1}{2}$
	$2\omega + 1 = 0$	$-\frac{1}{2}$
4	$\omega + 3 = 0$	-3
	$\omega - 3 = 0$	3
	$3\omega - 1 = 0$	$\frac{1}{3}$
	$3\omega + 1 = 0$	-$\frac{1}{3}$

N	Equação	ω
4	$\omega^2 + \omega - 1 = 0$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
	$\omega^2 - \omega - 1 = 0$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
	$\omega^2 - 2 = 0$	$-\sqrt{2}$
		$\sqrt{2}$
	$2\omega^2 - 1 = 0$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
		$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Observe que há equações que poderiam ser estar associadas a alguma altura N mas que não constam da tabela acima, seja por não cumprir restrições apresentadas anteriormente, seja por não possuírem soluções reais.

Por exemplo, a equação $\omega^2 - 1 = 0$ seria uma equação de altura $N = 3$. Entretanto, esta equação não é apresentada por não ser irredutível.[5]

Por sua vez, por exemplo, a equação $\omega^2 + 2 = 0$, embora irredutível, não possui raízes reais. Logo, não há números reais algébricos associados a esta equação.

Como vimos anteriormente, cada número real algébrico ω está associado a uma única equação da forma (1) com as restrições apresentadas, de modo que ω tem uma altura bem definida. Além disso, a cada altura N estão associados somente uma quantidade finita de números reais algébricos, a qual Cantor denomina $\varphi(N)$. Para verificar que $\varphi(N)$ é finito, basta encontrar, para cada inteiro positivo N uma cota superior para $\varphi(N)$.[6] Podemos fazê-lo utilizando técnicas de análise combinatória.

[5] Como mencionado anteriormente, $\omega^2 - 1 = (\omega + 1)(\omega - 1)$, logo a equação $\omega^2 - 1 = 0$ poderia ser reescrita na forma $(\omega + 1)(\omega - 1) = 0$. Entretanto, é claro que esta equação é satisfeita precisamente quando $\omega + 1 = 0$ ou $\omega - 1 = 0$, que são as equações de altura $N = 2$.

[6] O objetivo é somente o de encontrar uma cota superior, sem a preocupação de encontrar uma expressão geral para $\varphi(N)$. De fato, os valores de cota superior encontrados para $\varphi(N)$ extrapolam em muito o valor real de $\varphi(N)$. Por exemplo, $\varphi(4) = 12$, de acordo com o Exemplo , mas a cota superior calculada com a expressão que iremos calcular será igual a $1\,344\,560$. Ainda assim, a existência de uma cota superior para $\varphi(N)$ implica na finitude de $\varphi(N)$.

De fato, de (3) vemos que

$$N + 1 = n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| \ \ .$$

Assim, mesmo sem pensar em todas as restrições envolvidas, podemos observar a equação acima e verificar que as $N+1$ unidades (à esquerda) podem ser distribuídas nas $n+2$ posições (à direita). Como $n \leq N+1$, vemos que o número máximo de posições à direita da igualdade, quando $n = N+1$, é de $(N+1)+2 = N+3$ posições. Para simplificar, consideremos inicialmente que os coeficientes à direita são todos positivos. Então a primeira das $N+1$ unidades pode ser posicionada em qualquer uma das $N+3$ posições à direita, e o mesmo vale para a segunda, a terceira e assim por diante, até a unidade $N+1$. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, isso significa que há $(N+3)^{N+1}$ possibilidades de satisfazer a equação acima com coeficientes positivos.[7]

Ao considerar que os coeficientes $a_1, a_2, ..., a_n$ podem assumir sinal positivo ou negativo, multiplicamos o valor da cota superior por 2^N, obtendo uma cota superior $2^N(N+3)^{N+1}$ para o número de equações. Por sua vez, a equação (1) possui, no máximo, n soluções distintas. Uma vez que $n \leq N+1$, vemos que

$$\varphi(N) \leq 2^N (N+3)^{N+1}(N+1) \ \ .$$

Assim, concluimos que $\varphi(N)$ é finito, para todo inteiro positivo N.

Ora, como todo número real algébrico ω possui uma altura N bem definida, Cantor propõe uma sequência da forma

$$\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu, ...$$

para a classe de todos os números reais algébricos como segue. Iniciamos pelo único número de altura $N = 1$. Em seguida, colocamos os dois números de altura $N = 2$ em ordem crescente. Continuamos com este processo para cada valor de N, de modo que os $\varphi(N)$ valores com altura N sejam colocados em ordem crescente. Deste modo, todos os números reais algébricos estarão listados na sequência proposta.

Com esta construção, apresentamos os termos iniciais da sequência proposta por

---

[7] Ao considerar que $|a_0| \geq 1$, e olhar para cada valor de n entre 1 e o valor máximo N que n poderia assumir, poderíamos equiparar o problema em questão ao problema de distribuir $N-n$ bolas idênticas em $n+1$ urnas distintas, que são os coeficientes. Com esse raciocínio, poderíamos concluir que, para cada $n = 1, 2, ..., N$ há $\binom{N}{n}$ possibilidades de escolha para os coeficientes. Deste modo, somando para cada n, teríamos

$$\sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} \leq \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} = (1+1)^N = 2^N \ \ ,$$

de modo que 2^N é uma cota superior bem mais modesta. Esta cota superior, por sua vez, poderia ainda ser reduzida ao considerar as restrições de que a equação (1) deve ser irredutível, com coeficientes que não tenham múltiplo comum, e de modo que haja ao menos uma solução para a equação.

Cantor:

$$\underbrace{0}_{N=1},\overbrace{-1,1}^{N=2},\underbrace{-2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2}_{N=3},\overbrace{-3,\frac{-1-\sqrt{5}}{2},-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2},3}^{N=4},...$$

2.3 A classe dos números reais não é enumerável (§2)

Nesta seção, Cantor demonstra que nenhuma sequência

$$\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu, ... \tag{4}$$

é capaz de exibir todos os números reais. Em outras palavras, $\mathbb{R}$ não é enumerável. De fato, a demonstração de Cantor vai um passo além, e demonstra que nenhum intervalo aberto é enumerável. Vamos às ideias da demonstração.

Consideremos, sem perda de generalidade, que (4) é infinita e que seus termos são distintos. Sejam α, β números reais distintos quaisquer com $\alpha < \beta$. Basta encontrar η no intervalo aberto (α, β) tal que η não esteja na lista $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu, ...$. Para encontrar um valor η como mencionado, Cantor prossegue da seguinte maneira. Encontram-se os dois primeiros valores da sequência (4), ω_{n_1} e ω_{m_1}, que estejam no (interior do) intervalo (α, β), caso existam. Assim, o menor destes valores é denotado por α', e o maior por β'. Logo, temos que $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$, de modo que (α', β') é um subintervalo de (α, β). Prosseguindo na sequência (4), consideram-se os dois valores seguintes na sequência, ω_{n_2} e ω_{m_2}, que estejam no interior do intervalo (α', β').[8] O menor destes valores é denominado α'', e o maior, β''. Observe que, novamente, o intervalo (α'', β'') é um subintervalo do intervalo (α', β'). Esta construção prossegue enquanto for possível, obtendo-se os intervalos $(\alpha''', \beta'''), ..., (\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)}), ...$

Para compreender melhor esta construção antes de finalizar a prova, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.4

(a) Considere a sequência

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, ..., (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu}, ...$$

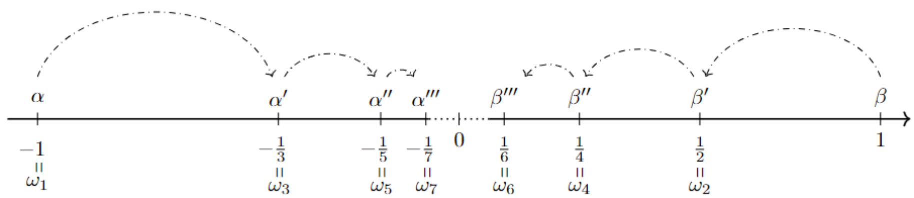
e sejam $\alpha = -1$ e $\beta = 1$. Neste caso, à exceção de -1, todos os valores da sequência estão no interior do intervalo (-1, 1). Logo, os primeiros valores da sequência que estão dentro do intervalo são $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{3}$. Colocando os valores em ordem crescente, temos $\alpha' = -\frac{1}{3}$ e $\beta' = \frac{1}{2}$. Prosseguindo na sequência, os valores $\frac{1}{4}$ e $-\frac{1}{5}$ estão no

[8] Isto quer dizer que $n_2, m_2 > \max(n_1, m_1)$.

interior de (α', β'). Colocando os valores em ordem, temos $\alpha'' = -\frac{1}{5}$ e $\beta'' = \frac{1}{4}$. Em geral,

$$\alpha^{(\nu)} = -\frac{1}{2\nu + 1} \ , \qquad\qquad \beta^{(\nu)} = \frac{1}{2\nu} \ .$$

Deste modo, a sequência dos $\alpha^{(\nu)}$ é crescente, a dos $\beta^{(\nu)}$ é decrescente, e ambas convergem para 0. Observe ainda que 0, o limite das sequências dos $\alpha^{(\nu)}$ e $\beta^{(\nu)}$, não faz parte da sequência dos ω_ν.



As sequências de $\alpha^{(\nu)}$ e $\beta^{(\nu)}$ são infinitas, e ambas convergem para 0.

(b) Considere a sequência ω'_ν, que constitui na sequência do exemplo anterior, mas acrescida do número 0 (zero) na posição ν_0. Assim,

$$\omega'_\nu = \begin{cases} \omega_\nu \ , & \text{se } \nu < \nu_0 \\ 0 \ , & \text{se } \nu = \nu_0 \\ \omega_{\nu-1} \ , & \text{se } \nu > \nu_0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^\nu}{\nu} & \text{se } \nu < \nu_0 \\ 0 & \text{se } \nu = \nu_0 \\ \dfrac{(-1)^{\nu-1}}{\nu - 1} & \text{se } \nu > \nu_0 \end{cases}$$

Enquanto $\nu < \nu_0$, continuaremos a ter

$$\alpha^{(\nu)} = -\frac{1}{2\nu + 1} = \omega'_{2\nu+1} \ , \qquad\qquad \beta^{(\nu)} = \frac{1}{2\nu} = \omega'_{2\nu} \ .$$

Suponhamos que ν_0 seja par. Então, $\nu_0 = 2k$, para algum k inteiro positivo. Então

$$\alpha^{\left(\frac{\nu_0}{2}-1\right)} = \alpha^{(k-1)} = -\frac{1}{2k - 1} = \omega'_{2k-1} \ , \quad \beta^{\left(\frac{\nu_0}{2}-1\right)} = \beta^{(k-1)} = \frac{1}{2k - 2} = \omega'_{2k-2} \ ,$$

de modo que os próximos termos na sequência dos ω'_ν serão

$$\omega'_{2k} = \omega'_{\nu_0} = 0 \ , \qquad\qquad \omega'_{2k+1} = \omega'_{\nu_0+1} = \frac{1}{\nu_0} = \frac{1}{2k} \ .$$

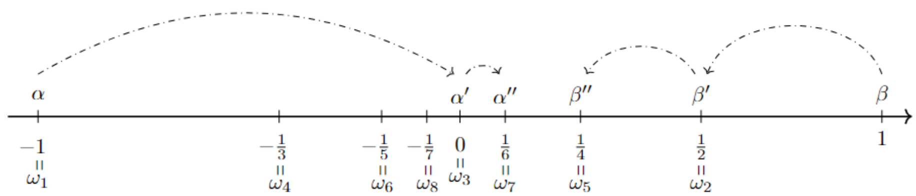
Logo, por construção, $\alpha^{(k)} = 0$ e $\beta^{(k)} = \frac{1}{2k}$. Deste modo, os próximos α_ν, β^ν, caso existam, devem ser positivos. Assim, os próximos termos da sequência dos ω'_ν a serem selecionados devem ser $\omega'_{\nu_0+3} = \omega'_{2k+3}$ e $\omega'_{\nu_0+5} = \omega'_{2k+5}$, ou seja,

$$\alpha^{(k+1)} = \omega'_{2k+5} = \frac{1}{2k + 4} \qquad\qquad \beta^{(k+1)} = \omega'_{2k+3} = \frac{1}{2k + 2}$$

Caso ν_0 seja ímpar, tomando $\nu_0 = 2k+1$ com k inteiro, um raciocínio análogo ao anterior nos levará à conclusão de que

$$\alpha^{(k+1)} = \frac{1}{2k+4} \;, \qquad \beta^{(k+1)} = \frac{1}{2k+2} \;.$$

Assim, se existir inteiro k tal que $\nu_0 = 1k$ ou $\nu_0 = 2k+1$, concluímos que o intervalo $\left(\frac{1}{2k+4}, \frac{1}{2k+2}\right)$ não possui elementos da sequência de ω'_ν, não sendo possível continuar a construção das sequências de $\alpha^{(\nu)}$ e $\beta^{(\nu)}$.
A Fig. **(b)** ilustra esta situação no caso em que $\nu_0 = 3$, ou seja, $\omega'_{2k+1} = 0$, com $k = 1$.



As sequências de $\alpha^{(\nu)}$ e $\beta^{(\nu)}$ estão definidas somente até $\alpha^{(k+1)}$ e $\beta^{(k+1)}$.

(c) Considere a sequência com a regra de formação

$$\omega_{2\nu-1} = -\frac{\nu+1}{2\nu+1} \;, \qquad \omega_{2\nu} = \frac{\nu+1}{2\nu+1} \;.$$

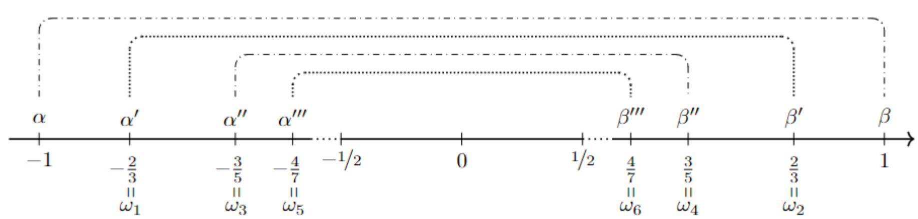
Ou seja,

$$-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{7}, \frac{4}{7}, \dots \;.$$

Considere também $\alpha = -1, \beta = 1$. Então, pode-se observar que, para cada número inteiro positivo ν,

$$\alpha^{(\nu)} = \omega_{2\nu-1} \;, \qquad \beta^{(\nu)} = \omega_{2\nu} \;.$$

Note ainda que a sequência $\alpha', \alpha'', ..., \alpha^(\nu), ...$ é crescente e converge para $-\frac{1}{2}$, enquanto a sequência $\beta', \beta'', ..., \beta^{(\nu)}, ...$ é decrescente e converge para $\frac{1}{2}$.

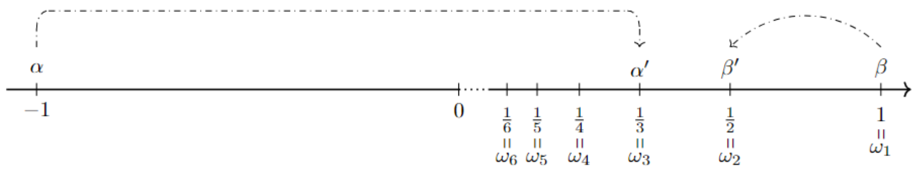


As sequências de $(\alpha^{(\nu)} e \beta^{(\nu)})$ são infinitas, mas $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha^{(\nu)} < \lim\limits_{\nu\to\infty} \beta^{(\nu)}$.

(d) Sejam $\alpha = -1$ e $\beta = 1$. Considere a sequência $\omega_\nu = 1/\nu$ para cada inteiro positivo ν, ou seja,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{\nu}, ...$$

Então os dois primeiros termos na sequência que estão no intervalo $(-1, 1)$ são $\omega_2 = \frac{1}{2}$ e $\omega_3 = \frac{1}{3}$, de modo que $\alpha' = \frac{1}{3}$ e $\beta' = \frac{1}{2}$. Vemos que todos os termos $\omega_4, \omega_5, ...$ são menores que $\frac{1}{3}$, logo estão fora do intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Portanto, $\alpha^{(\nu)}$ e $\beta^{(\nu)}$ não estão definidos para $\nu \geq 2$.



As sequências de $\alpha^{(\nu)}$ e $\beta^{(\nu)}$ são finitas.

Tendo em mente os exemplos acima apresentados, vamos prosseguir com as ideias da demonstração de Cantor de que é impossível enumerar $\mathbb{R}$. Vamos relembrar daquilo de que dispomos até o momento. Dada uma sequência de números reais da forma

$$\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu, ...$$

e um intervalo aberto (α, β) qualquer, foram selecionados números $\alpha^{(\nu)}$, $\beta^{(\nu)}$ de modo que:

1. $\alpha^{(\nu)} = \omega_n$ para algum n e $\beta^{(\nu)} = \omega_m$ para algum m;
2. $\alpha^{(\nu)} < \beta^{(\nu)}$;
3. Dados $\nu > \mu$, se

$$\alpha^{(\nu)} = \omega_{n1} \ , \qquad \beta^{(\nu)} = \omega_{m1} \ ,$$
$$\alpha^{(\mu)} = \omega_{n2} \ , \qquad \beta^{(\mu)} = \omega_{m2},$$

   então $\min{(n2, m2)} > \max{(n1, m1)}$;
4. O intervalo $\left(\alpha^{(\nu+1)}, \beta^{(\nu+1)}\right)$ é subintervalo de $\left(\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)}\right)$.

Uma vez estabelecido um método para construir os intervalos $(\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)})$, e observando que cada intervalo em questão é subintervalo de todos que foram construídos anteriormente, Cantor considera dois casos distintos.

Caso 1. A quantidade de intervalos (α', β'), (α'', β''), ... é finita. É o que ocorre no item **(d)** do Exemplo . Neste caso, se $(\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)})$ é o último destes intervalos, então existe no máximo um valor ω_p da sequência (4) que está no intervalo $(\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)})$ pois, caso houvesse dois (ou mais) valores no intervalo em questão, estes valores poderiam constituir um novo subintervalo $(\alpha^{(\nu+1)}, \beta^{(\nu+1)})$, contradizendo a hipótese de que $(\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)})$ é o último destes intervalos. Assim, qualquer número η no intervalo (que seja diferente de ω_p, caso exista) será um número real que não consta na lista (4). Por exemplo, pelo menos um dentre os números reais $\frac{\alpha^{(\nu)}+\beta^{(\nu)}}{2}$ e $\frac{2\alpha^{(\nu)}+\beta^{(\nu)}}{3}$ não consta na sequência (4).

Caso 2. A quantidade de intervalos $(\alpha', \beta'), (\alpha'', \beta''), ...$ é infinita. Cantor observa que, uma vez que a sequência $\alpha', \alpha'', ...$ é crescente e superiormente limitada (β é uma cota superior para esta sequência), a sequência possui um limite. Analogamente, a sequência decrescente $\beta', \beta'', ...$, que é inferiormente limitada (α é cota inferior), também possui um limite. Por construção, $\alpha^{(\nu)} < \beta^{(\nu)}$, para todo inteiro positivo ν. Logo, $\lim_{\nu\to\infty} \alpha^{(\nu)} \leq \lim_{\nu\to\infty} \beta^{(\nu)}$. Assim, o caso em que a sequência de intervalos é infinita é dividido em duas partes.

(i) $\lim_{\nu\to\infty} \alpha^{(\nu)} < \lim_{\nu\to\infty} \beta^{(\nu)}$. É o que ocorre no item **(c)** do Exemplo . Observe que, assim como no caso em que a quantidade de intervalos $(\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)})$ é finita, não é possível haver mais que um ω_p entre $\lim_{\nu\to\infty} \alpha^{(\nu)}$ e $\lim_{\nu\to\infty} \beta^{(\nu)}$, pois do contrário haveriam $\alpha^{(\nu_0)} > \lim_{\nu\to\infty} \alpha^{(\nu)}$ e $\beta^{(\nu_0)} < \lim_{\nu\to\infty} \beta^{(\nu)}$. Assim, basta tomar qualquer valor η entre $\lim_{\nu\to\infty} \alpha^{(\nu)}$ e $\lim_{\nu\to\infty} \beta^{(\nu)}$. O valor η será um número real que não está na sequência (4).

(ii) $\lim_{\nu\to\infty} \alpha^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} \beta^{(\nu)}$. É o que ocorre no item **(a)** do Exemplo . Neste caso, Cantor afirma que o próprio limite $\eta = \lim_{\nu\to\infty} \alpha^{(\nu)}$ não pode constar na sequência (4). De fato, se η estivesse na sequência, então teríamos que $\eta = \omega_p$ para algum número inteiro positivo p. Como a sequência $\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(p)}, ...$ é crescente e converge para η, temos que $\eta > \alpha^{(p)}$. Analogamente, $\eta < \beta^{(p)}$. Logo, $\eta = \omega_p$ deve estar no intervalo $(\alpha^{(p)}, \beta^{(p)})$. Entretanto, ω_p não pode estar no intervalo $(\alpha^{(p)}, \beta^{(p)})$. De fato, pela construção das sequências dos $\alpha^{(\nu)}$ e $\beta^{(\nu)}$, se $\alpha^{(\nu)} = \omega_n$ e $\beta^{(\nu)} = \omega_n$ então, tomando $k = \max(n, m)$, nenhum dos números $\omega_1, \omega_2 m..., \omega_k$ pode estar no interior do intervalo $(\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)})$. Em particular, isto é verdadeiro para $\nu = p$. Mas se $\alpha^{(p)} = \omega_n$ e $\beta^{(p)} = \omega_m$ então, considerando que os ω_ν devem ser selecionados em pares, temos que $n, m \geq 2p - 1$. Se $p = 1$, é possível que $\alpha' = \omega_1$ ou $\beta' = \omega_1$, mas neste caso ω_1 não pode estar no intervalo aberto (α', β'). Por sua vez, para $p > 1$, temos $p \leq m, n$ e, deste modo, ω_p não pode pertencer ao intervalo $(\alpha^{(p)}, \beta^{(p)})$. Logo, para qualquer inteiro positivo p, é impossível que ω_p pertença ao intervalo $(\alpha^{(p)}, \beta^{(p)})$. Consequentemente, é impossível que ω_p seja igual ao limite $\eta = \lim_{\nu\to\infty} \alpha^{(n)} = \lim_{\nu\to\infty} \beta^{(n)}$.

Consequentemente, η não pertence à sequência (2). Portanto, como a sequência (2) é arbitrária, concluímos que o intervalo (α, β) não é enumerável, e consequentemente, $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Observe que, conforme o item **(b)** do Exemplo , caso incluamos o número η na sequência de ω_ν, isto modifica a construção dos $\alpha^{(\nu)}$ e $\beta^{(\nu)}$, de modo que voltamos a cair em um dos casos mencionados.

Após concluir esta demonstração, Cantor argumenta que os resultados demonstrados podem ser estendidos de diversas maneiras. Como exemplos, são citados:

1. sequências, finitas ou infinitas, de números linearmente independentes $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...$, tais que não existam combinações lineares $a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + ... + a_n\omega_n = 0$ em que os coeficientes inteiros $a_1, a_2, ..., a_n$ não sejam todos nulos. Um exemplo seria a sequência finita $\omega_1 = \pi$, $\omega_2 = e$.
2. Funções racionais, com coeficientes inteiros, dos números ω dados.

Conclusão

Como vimos, em CANTOR, 1874 são apresentados dois resultados de grande importância. Primeiramente, é apresentada uma demonstração de que a classe dos números reais algébricos (ω) é enumerável. Mais do que isso, a demonstração é feita por meio da construção de uma enumeração. Uma vez que todo número racional é um número real algébrico, segue que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Além disso, Cantor demonstra que, dada qualquer sequência de números $\omega_1, ..., \omega_\nu$, ..., é possível encontrar, em qualquer intervalo aberto (α, β), números que não estejam na sequência. Assim, nenhum intervalo aberto em $\mathbb{R}$ pode ser enumerado. Consequentemente, $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Unindo ambas as informações, Cantor demonstrou, pela primeira vez, que há uma diferença fundamental entre diferentes tipos de infinito: o infinito enumerável e o contínuo. Os números reais estão distribuídos por toda a reta (ou seja, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$), mas é enumerável. Ainda assim, $\mathbb{R}$ é um conjunto com uma estrutura muito mais rica que $\mathbb{Q}$.

Referências Bibliográficas

CANTOR, G. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. In: CANTOR (1932). [S.l.]: *Crelles Journal f. Mathematik*, Bd. 77, 258–262, 1874. pp. 115–118.

CANTOR, G. Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. In: CANTOR (1932). [S.l.]: *Jahresbericht der Deutsch*. Math. Vereinig. Bd. I, 75–78, 1891. pp. 278–280.

CANTOR, G. *Gesammelte Abhandlugen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Edição: Ernst Zermelo. Berlin: J. Springer, 1932.

DAUBEN, J. W. *Georg Cantor: his mathematics and philosophy of the infinite*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1990. ISBN 9780691085838.

ROYDEN, H. L. *Real analysis*. third edition. New York: Macmillan Publishing Company, 1988.

Abner Brito
Instituto Federal do Paraná – IFPR – Paraná, Brasil

E-mail: abner.brito@ifpr.edu.br

Fábio Maia Bertato
Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência – CLE

Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP – Brasil

E-mail: fbertato@unicamp.br