

UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA SOBRE O DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO DAS SEPARÁVEIS PARA RESOLVER EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Anna Karla Silva do Nascimento
Universidade Federal do Cariri – UFCA – Brasil

Iran Abreu Mendes
Universidade Federal do Pará – UFPA – Brasil

(aceito para publicação em abril de 2025)

Resumo

Este artigo apresenta uma análise histórica e epistemológica do desenvolvimento das Equações Diferenciais, com foco no método das separáveis, a partir de fontes históricas, como dois artigos do periódico *Acta Eruditorum*, cujas autorias pertencem a Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) e Jakob Bernoulli (1655–1705), bem como quatro correspondências trocadas entre Gottfried Wilhelm von Leibniz e Christiaan Huygens (1629–1695). O objetivo é apresentar o desenvolvimento das Equações Diferenciais, desde o momento em que o termo foi citado por Leibniz, em 1684, no periódico *Acta Eruditorum* até a resolução de problemas discutidos por cartas e, finalmente, a consolidação do método de resolução das Separáveis. A metodologia adotada é uma pesquisa documental, com o auxílio da técnica de análise de conteúdo, realizada em fontes primárias datadas do século XVII. Os resultados apresentados demonstram a construção do desenvolvimento do método das separáveis para resolver Equações Diferenciais, com abordagem do diálogo entre os personagens e discussões matemáticas. Diante do exposto, concluímos que, ao revisitar os desdobramentos históricos das Equações Diferenciais, este estudo reitera a importância do método e oferece uma perspectiva de discussão no ensino superior, no intuito de compreender a episteme dessas ideias e perceber que a matemática também foi desenvolvida de maneira colaborativa por diferentes pensadores ao longo dos tempos.

Palavras-chave: História da Matemática, Equações Diferenciais, Equação Diferencial Separável, Investigação Histórica.

[A HISTORICAL PERSPECTIVE ON THE DEVELOPMENT OF THE SEPARABLE METHOD FOR SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS]

Abstract

This article presents a historical and epistemological analysis of the development of Differential Equations, focusing on the method of separable variables, based on historical sources such as two articles from the *Acta Eruditorum* journal, authored by Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) and Jakob Bernoulli (1655–1705), as well four correspondences between Gottfried Wilhelm von Leibniz and Christiaan Huygens (1629–1695). The objective is to present the development of Differential Equations, from the moment the term was first mentioned by Leibniz in 1684, in the *Acta Eruditorum* journal, to the resolution of problems discussed through letters and, finally, the consolidation of the method of separable variables. The adopted methodology is a documentary research, supported by the technique of content analysis, conducted on primary sources from the 17th century. The results presented include the development of the method of separable variables for solving Differential Equations, addressing the dialogue between the individuals and the mathematical discussions. Given the above, we conclude that by revisiting the historical developments of Differential Equations, this study reiterates the importance of the method of separable variables and offers a perspective for discussion in higher education, aiming to understand the episteme of these ideas and to recognize that mathematics was also developed collaboratively by different thinkers over time.

Keywords: History of Mathematics, Differential Equations, Separable Differential Equation, Historical Investigation.

Introdução

É sabido que as Equações Diferenciais são utilizadas para modelar e resolver problemas de diversas áreas de conhecimento, dentre elas, Matemática, Física e Engenharias, como afirma Nascimento (2024). Além disso, é um conteúdo disciplinar denso, porém necessário para ser trabalhado no ensino superior, porque embora seja envolvido de demonstrações e métodos de resolução distintos, elas possibilitam uma série de soluções para problemas do cotidiano que envolvam matemática.

Diante disso, propomos, neste trabalho, uma possibilidade de investigação histórica da forma que este tema, amplamente abordado na atualidade, foi vislumbrado e discutido no final do século XVII por alguns estudiosos como Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), Christiaan Huygens (1629–1695) e Jakob Bernoulli (1655–1705). Para isso, faremos um recorte de documentos históricos, como edições do periódico *Acta Eruditorum*, bem como correspondências trocadas entre alguns deles.

Apesar das Equações Diferenciais serem trabalhadas em várias áreas do conhecimento científico, destacamos que sua análise histórica e epistemológica é pouco

discutida na comunidade acadêmica. Esse fator proporciona que haja novas discussões acerca da história do seu desenvolvimento, bem como o período em que os documentos foram apresentados.

Vale destacar que esta análise adota uma perspectiva eurocêntrica, dado que os personagens, o contexto histórico e a difusão dos estudos ocorreram na Europa. Os documentos estudados incluem as primeiras referências ao termo "Equação Diferencial" e discutem a evolução das técnicas de resolução até o desenvolvimento do método das Separáveis.

Nesse sentido, apresentaremos um percurso histórico que provocou o desenvolvimento desse tema para evidenciar eventuais particularidades que não estão clarificadas na disciplina do curso. Esse viés explora o contexto cultural e social que eles viviam, bem como a episteme do tema no momento de possíveis discussões científicas.

O objetivo desse artigo é apresentar o desenvolvimento das Equações Diferenciais, desde o momento que o termo foi citado por Leibniz, em 1684, no periódico *Acta Eruditorum*, até a resolução de problemas discutidos por cartas e, finalmente, a consolidação do método de resolução das Separáveis.

A ideia de escrever um artigo sobre uma história do desenvolvimento das Equações Diferenciais, mais precisamente, sobre o método das Separáveis, se deu pela importância que atribuímos ao conhecimento histórico. Nele também podemos explorar o contexto sociocultural, pois dá uma visão macro do convívio dos povos, bem como colabora com a interpretação do pensamento dos personagens, gerando a possibilidade da análise epistemológica do estudo das Equações Diferenciais.

Além disso, o tema possui importância para o ensino superior, pois permite a compreensão do seu desenvolvimento histórico e a identificação de lacunas deixadas pelos estudiosos da época, embora algumas delas, inicialmente ignoradas ou não resolvidas, foram debatidas entre os próprios pesquisadores, enquanto outras continuaram como investigações em aberto até serem abordadas por estudiosos que vieram posteriormente, como enfatiza Mendes (2009/2015).

Esse processo contínuo de revisão e debate contribui para a formação crítica dos alunos, que passam a enxergar o conhecimento como algo não estático, que permite discussões e ajustes para uma evolução constante, enriquecido pelas diferentes contribuições ao longo do tempo. Esse entendimento pode apoiar o aprendizado dos estudantes, desmistificando a ideia de que a matemática já estaria pronta e acabada e que os estudiosos não enfrentaram dificuldades em seu desenvolvimento.

Procedimentos metodológicos

A metodologia adotada neste artigo baseia-se em uma pesquisa qualitativa, pois ela se mostra eficaz quando analisa aspectos sociais e históricos. Para o nosso caso, analisamos fontes oriundas do século XVII, tendo em vista as sociedades em que os pesquisadores estavam imersos. A escolha pela pesquisa qualitativa está em sintonia com a busca por uma compreensão inicial do contexto histórico que contribuiu para o desenvolvimento das Equações Diferenciais.

No que se refere à sua natureza, identificamos este estudo como uma pesquisa básica, pois tem o intuito de ampliar, teoricamente, a compreensão de estudantes de graduação, professores e pesquisadores de matemática acerca da maneira que a temática foi apresentada no século XVII. Para Gil (2008), a pesquisa de natureza básica produz conhecimentos novos que favorecem o avanço científico.

A pesquisa é caracterizada como descritiva, porque preocupa-se em analisar a essência e as características da relação proposta, também alinhando-se com a pesquisa exploratória. Desse modo, compartilhamos o pensamento de Almeida (2021, p. 31) quando esclarece que uma pesquisa descritiva “encontra-se vinculada, apenas, à descrição e registro de fatos sem a intervenção sobre eles”. Tal fator justifica-se porque a fonte utilizada é primária.

As expressões matemáticas e conceitos abordados neste artigo estão sintetizados em quatro correspondências entre Leibniz e Huygens, bem como dois artigos publicados por Leibniz em 1684 e Jakob Bernoulli, em 1690, no periódico *Acta Eruditorum*, cujo teor dos documentos era discutir e resolver problemas relativos à Filosofia Natural, dos quais em maior parte, tratavam sobre o comportamento de curvas que encontravam na natureza ou no cotidiano.

Por se tratar de textos originais, nota-se que forneceram informações genuínas sobre o estudo das Equações Diferenciais, além de evidenciarem o conhecimento existente sobre o tema. A fonte selecionada para este estudo corrobora o pensamento de Godoy (1995, p. 22), ao afirmar que “os documentos constituem uma fonte não reativa, as informações nelas contidas permanecem as mesmas após longos períodos de tempo”. Nesse contexto, o trecho reforça a ideia de que as informações nos documentos citados anteriormente são preservadas ao longo do tempo.

Diante do que foi apresentado, a pesquisa documental será realizada mediante a exploração de seis fontes primárias, conforme expõe Fachin (2006, p.121), “as fontes primárias são constituídas pela bibliografia que propicia o embasamento teórico do assunto pesquisado, ou seja, é a bibliografia básica para aquele assunto”. Essa abordagem documental vai ao encontro da pesquisa histórica que foi realizada, uma vez que permite uma análise focada em nosso objeto de pesquisa. Ou seja, colaboram com a compreensão do contexto no qual os três estudiosos estavam inseridos, possibilitando a reconstrução do passado e a compreensão da história do desenvolvimento matemático.

Além disso, a escolha dos documentos, bem como a análise dos textos foi feita mediante análise de conteúdo proposta por Bardin (1977). Na ocasião, foram feitas leituras das *Actas Eruditorum* e correspondências a partir da leitura e tradução dos textos, uma vez que as fontes selecionadas estão escritas em latim e francês, respectivamente. Vale salientar que o material escolhido converge com o objetivo, pois colabora na apresentação de estudiosos do século XVII que foram estimulados a resolverem problemas de Filosofia natural que contribuíram com a evolução do estudo das Equações Diferenciais, tal qual o desenvolvimento de seus métodos de resolução.

Na utilização das fontes destacadas nesta seção, esta pesquisa busca fornecer uma compreensão abrangente e aprofundada do desenvolvimento histórico e epistemológico das Equações Diferenciais desde os primórdios do século XVII e de como elas eram abordadas.

Desenvolvimento histórico das Equações Diferenciais

Nesta seção, exploraremos em detalhes o método de resolução de Equações Diferenciais separáveis, a partir de documentos históricos, como dois artigos do periódico *Acta Eruditorum* publicados em 1684 e 1690 por Leibniz e Jakob Bernoulli, respectivamente, tal como as correspondências entre Leibniz e Huygens no ano de 1691. Nossa intenção é fornecer uma compreensão desse método a partir do ponto de vista dos estudiosos que frequentemente trocavam informações sobre matemática e demonstravam interesse em justificar as curvas que modelavam a natureza.

A *Acta Eruditorum* de 1684, em que Leibniz apresentou o termo Equação Diferencial em um contexto no qual ainda não havia o conceito formal de funções, portanto, a comunidade científica estava envolvida com o estudo de diversos tipos de curvas, que eram modeladas por expressões das quais as caracterizavam como expressões compostas por igualdades e letras que atualmente denominamos como equações, da mesma forma, as letras, simbolizam as variáveis. Como enfatiza Mendes (2009),

“a Matemática é um saber gerado pela sociedade humana e por consequência, possui uma história. Todavia, esse conhecimento, certamente, amplia-se em conteúdo escrita e simbologia ao longo do tempo, de forma não-linear, porém, traçada por controvérsias, debates, divergências, renovações e atualizações incessantes”. (Mendes, 2009, p. 46)

Para o autor, a matemática é um conhecimento que está em constante transformação, e que sua história é moldada por interações humanas e pelos desafios intelectuais de cada época, sempre em um processo de desenvolvimento.

Somando-se a esse pensamento, a nomenclatura e suas peculiaridades para resolver problemas, conforme Nascimento (2024), proporcionou uma linguagem mais precisa para descrever modelos matemáticos e nominá-los, bem como estabeleceu as bases para um universo que se formou com o progresso do tema. Outro autor que defende a simbologia da linguagem matemática, dessa vez com um olhar histórico para o século XVII é Rossi (2001) que afirma,

“A nova matemática que vem consolidando-se entre a primeira metade do século XVII e o começo do XVIII é sem dúvida o mais poderoso instrumento teórico que tenha sido construído pelos seres humanos no decorrer da história”. (Rossi, 2001, p. 252)

Com vistas a compreender a matemática detentora de instrumentos teóricos importantes para aquela época, ela auxilia na compreensão de uma matemática que pode evidenciar os fatos narrados pela própria natureza, propiciando descobertas e progresso. Ela é considerada um recurso importante para o conhecimento científico, como é o caso dos modelos de Equações Diferenciais, que podem ser considerados como um desses meios de justificação de tais fenômenos.

Para apreciação do termo supracitado, apresentamos a Figura 1 que explicita a página 467 do periódico mencionado.

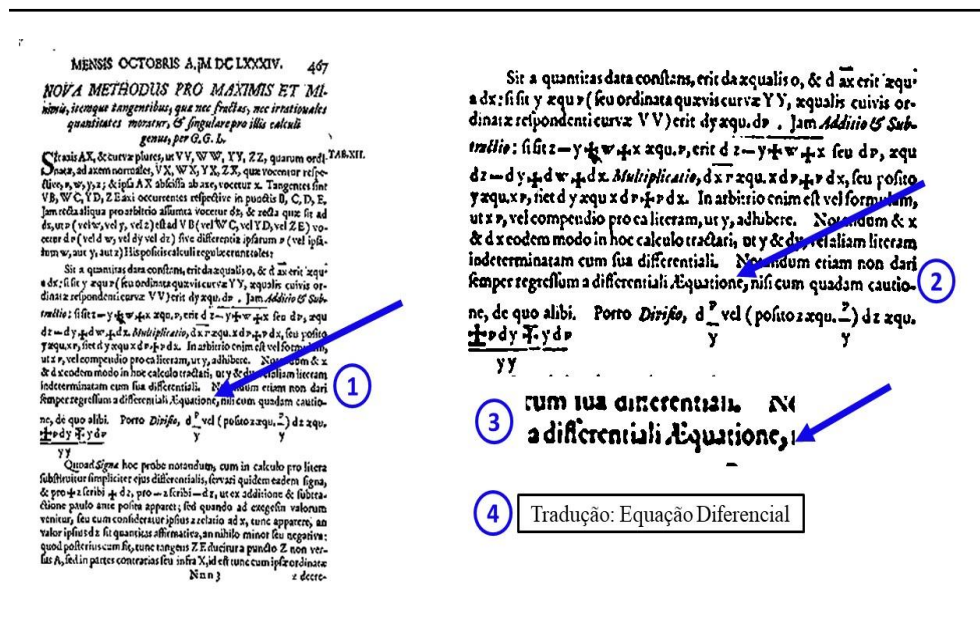


Figura 1 – Página 467 da *Acta Eruditorum* de 1684.

Fonte: Nascimento (2024, p. 85), adaptado de Struik (1969).

Na parte (1) da Figura 1, Leibniz introduz o termo Equação Diferencial aos leitores do periódico, conforme podemos examinar, por meio da ampliação da imagem em (2) e (3). Em (4) fornecemos a tradução, permitindo ao leitor uma apreciação mais clara para compreensão do conteúdo do documento. Esse trecho da nomeação do termo foi importante, porque desenrolou-se no momento histórico que o Cálculo Infinitesimal estava em plena discussão.

Com o avanço do Cálculo Infinitesimal no século XVII, desenvolveram-se também ferramentas capazes de solucionar questionamentos referentes ao estudo de curvas advindas de observações ocasionadas da Filosofia Natural. Wussing (1998) afirma que estudiosos como Leibniz precisaram, ou se utilizaram, do conhecimento referente para examinar seus problemas, fazendo uso das Equações Diferenciais.

Diante das peculiaridades que elas possuíam, embora novas ideias frequentemente desafiassem a compreensão dos estudiosos da época e seus métodos tradicionais de resolução, foram exploradas maneiras distintas para tratar esses problemas, evidenciando a necessidade de outras abordagens na resolução de Equações Diferenciais.

Em face disso, os métodos de resolução surgiram da necessidade dos estudiosos de solucionar problemas específicos. Eles perceberam que a construção do conhecimento estava intrinsecamente ligada ao ambiente em que estavam inseridos, e que precisavam agir de maneira criativa para obter resultados. Essa abordagem reflete não apenas as diferentes concepções de como o universo funciona, mas à própria possibilidade de fazer daquela história o objeto de uma investigação científica, conforme enfatiza Rossi (1998).

Uma classe particularmente importante de Equações Diferenciais é a das Equações Diferenciais separáveis, cuja definição, segundo Zill (2016, p. 49), “uma Equação Diferencial de primeira ordem da forma $\frac{dy}{dx} = g(x).h(y)$ é chamada separável”, ou seja, uma ED é separável se as variáveis independentes conseguem ficar isoladas das variáveis dependentes.

Em 1655, Christiaan Huygens fez sua primeira visita a Paris, onde passou alguns anos. Durante esse período, teve a oportunidade de se familiarizar com os estudos de pesquisadores franceses, como Roberval (1602 - 1675), Pascal (1623 - 1662) e Fermat (1601-1665). Em 1666, Huygens recebeu um convite de Colbert para se tornar membro da Academia Real de Ciências da França, tendo prontamente aceitado, e contribuiu para a instituição.

Com suas idas e vindas a Paris, Huygens trocou diversas correspondências, que mostram a parceria e o respeito mútuo entre ele e outros estudiosos. Muitas das cartas trocadas mostrando a parceria e o respeito entre eles; em outras, nem tanto. Vide algumas cartas de 1691 – disponibilizadas nos sites que armazenam informações acerca da vida e obra de Christiaan Huygens, como o Biblioteca Digital de Literatura Holandesa (DBNL), que um aparente equívoco interpretativo provocou a escrita de cartas em tons pesados e com trocas de farpas. Nascimento (2024) enfatiza que também houve encontros presenciais, proporcionados pela vida acadêmica.

Além dos estudiosos residentes da França, Huygens mantinha contato com ingleses, como Newton e Wallis. Essas trocas de informações ou correspondências eram interessantes para que o conhecimento científico europeu fosse publicizado. As cartas refletem a atividade intelectual e as discussões científicas da época, mostrando que personagens como Huygens estavam envolvidos em debates e investigações matemáticas (Nascimento, 2024).

Em algumas dessas correspondências, Huygens e Leibniz discutiam temas relacionados à física e à resolução de problemas nas ciências naturais, o que levou à apresentação e resolução de Equações Diferenciais, com a vasta discussão sobre problemas acerca da resistência dos corpos, tratado sobre luz e cálculos de tangentes. Também discutiam temáticas que seriam publicadas posteriormente e procuravam informações acerca de outros pesquisadores para saber o que estavam estudando.

Na seção a seguir, apresentamos parte do conteúdo das correspondências que os estudiosos interagiram em 1691.

Discussão epistemológica e matemática do conteúdo das correspondências

Nesse encadeamento de ideias, expomos o primeiro problema que é o resultado de uma ampla troca de correspondências entre Huygens e Leibniz, feitas no ano de 1691, em que há divergências de ideias sobre uma relação que Huygens (na carta datada em 23/02/1691) encontrou entre a quadratura da hipérbole e uma curva logarítmica. No texto, Leibniz enfatizou que os cálculos estão muito longos e que ele os fez utilizando tangentes. Além disso, afirmou que encontrou uma família de curvas, situação sobre a qual Huygens o contradisse com veemência (Huygens, 1905).

Na carta, Huygens iniciou com um aparente descontentamento devido os recorrentes desentendimentos que ocorreram entre ele e Leibniz, por causa das correspondências anteriores em que os pensamentos matemáticos não coadunavam. Dentre eles, uma divergência em relação à interpretação de resistência, pois Huygens a analisa como a perda de velocidade causada pelo meio, enquanto Leibniz a considera como a pressão do meio sobre a superfície de um corpo em movimento.

Houve também pontos de convergências de pensamentos naquele documento, dentre eles, foi quando Huygens reconheceu que há similaridades entre seus estudos sobre a quadratura da hipérbole e a solução de Leibniz, feita por meio de logaritmos. Finalizou afirmando que desejava reencontrar o amigo brevemente.

A resposta de Leibniz foi registrada na carta datada de 02/03/1691, cujo conteúdo iniciou com o reconhecimento de um equívoco por ter suspeitado que Huygens não acreditava nas suas suposições, diante disso, fez o pedido de desculpas pelo equívoco. Essa atitude de Leibniz reforça a afirmação de Martins (2006, p. 22), ao argumentar que:

“A ciência não brota pronta, na cabeça de “grandes gênios”. Muitas vezes, as teorias que aceitamos hoje foram propostas de forma confusa, com muitas falhas, sem possuir uma base observacional e experimental. Apenas gradualmente as ideias vão sendo aperfeiçoadas, através de debates e críticas, que muitas vezes transformam totalmente os conceitos iniciais.”

O autor compartilhou da ideia de que a ciência não surge pronta na mente dos pesquisadores, mas muitas vezes é proposta de forma confusa, com falhas e sem uma base observacional e experimental sólida. A evolução das ideias acontece gradualmente, por meio de observações, questionamentos, discussões e críticas, capazes de transformar os conceitos iniciais, de modo que essa perspectiva aponte o desenvolvimento dinâmico da natureza e o progresso constante do conhecimento científico.

A carta prosseguiu com a retomada da discussão sobre resistência do ar em relação à velocidade de um corpo. Incluiu também breves comentários sobre assuntos científicos e filosóficos, dos quais destacou a variação da agulha magnética, paralelas, leis da mola, exponenciais, magnetismo, isocronismo, o problema das marés, iniciado por Descartes e continuado por outros pesquisadores.

Em seguida, Leibniz demonstrou interesse pelos estudos do suíço Fatio de Duillier (1664–1753), que contribuiu acerca de curvas cujas tangentes tinham uma natureza

conhecida, considerando um desafio importante na geometria. O interesse não era recíproco, mas Leibniz propôs que Huygens intermediasse uma aproximação entre eles, sem êxito.

Em sequência na discussão sobre curvas, Leibniz citou curvas geradas por meio de Equações Diferenciais e que várias curvas satisfazem uma equação. Nesse caso, chamamos atualmente de família de curvas, devido à semelhança das características. Para concluir, ele percebeu que encontrava soluções particulares para uma Equação Diferencial, porque sempre que resolvia os problemas, constituía uma quantidade C , que chamamos de constante real.

Com isso, para todo C real, há uma função correspondente que chamamos de solução particular. Para esse caso, Leibniz considera a Equação Diferencial (1) que está disposta na nota de rodapé da carta, ou seja, não encontramos no corpo do texto. Porém, ao resolvê-la, verificamos que suas soluções coincidem com a descrita na correspondência.

$$ax \, dx = y\sqrt{aa - xx} \, dy \quad (1)$$

No texto original, está na sexta nota de rodapé da seguinte forma

“De fato, a solução geral do problema, que equivale à integração da equação diferencial $ax \, dx = y\sqrt{aa - xx} \, dy$, pode ser escrita: $a^4 - a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - Cy^2 + C^2$. Leva, portanto, para $C = a^2$, à segunda das equações mencionadas por Leibniz, e, para $C=0$ à primeira, após a correção que Leibniz lhe trouxe em sua Carta de 20 de abril de 1691” (Huygens, 1905, p. 50, tradução nossa).¹

A citação anterior apresenta a Equação Diferencial cuja resolução é feita pelo método das separáveis. Com esse propósito, basta isolar as variáveis (nomenclatura utilizada atualmente), ou seja, dada uma função $y = f(x)$, a variável y será colocada em um membro e a variável x , colocada no outro. Após isso, o passo seguinte é o cálculo da integração de ambos os membros para encontrar a solução geral da Equação Diferencial.

Observemos que a notação utilizada por Leibniz difere daquela que usualmente é trabalhada nos livros de Equações Diferenciais Ordinárias; porém, podemos trazer para a forma de escrita aplicada atualmente.

Vejam a Equação Diferencial e sua solução, pelo método das separáveis, como tratamos nos dias de hoje:

$$ax \, dx = y\sqrt{a^2 - x^2} \, dy \quad (2)$$

¹ “En effet, la solution générale du problème, qui revient à l'intégration de l'équation différentielle $ax \, dx = y\sqrt{aa - xx} \, dy$ peut s'écrire: $a^4 - a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - Cy^2 + C^2$. Elle conduit donc, pour $C = a^2$, à la seconde des équations mentionnées par Leibniz, et, pour $C=0$ à la première, après la correction que Leibniz y apporta dans sa Lettre du 20 avril 1691” (Huygens, 1905, p. 50).

Iniciando a resolução desta Equação Diferencial, utilizaremos o método das separáveis, para isso, isolaremos as variáveis em seus respectivos membros.

$$\frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = y dy \quad (3)$$

Integrando ambos os membros

$$\int \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int y dy \quad (4)$$

Pela propriedade de integração, podemos colocar a constante a para fora da integral:

$$a \int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int y dy \quad (5)$$

Utilizando a integração por substituição de variáveis, resolvemos o primeiro membro e o segundo é uma integração de polinômios.

Tome $u = a^2 - x^2$, então $du = -2x dx$, $-\frac{1}{2} du = x dx$

Substituindo em (5), temos:

$$a \int -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int y dy \quad (6)$$

Organizando a EDO, temos:

$$-\frac{a}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \int y dy \quad (7)$$

Integrando ambos os membros:

$$-\frac{a}{2} \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{(-\frac{1}{2}+1)} = \frac{y^{1+1}}{1+1} + C, \text{ consideramos } C \text{ uma constante real.} \quad (8)$$

Reduzindo os valores,

$$-\frac{a}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{y^{1+1}}{1+1} + C \quad (9)$$

Organizando a equação, temos:

$$-a u^{\frac{1}{2}} = \frac{y^2}{2} + C \quad (10)$$

$$-a\sqrt{u} = \frac{y^2}{2} + C \quad (11)$$

Voltando à variável inicial, temos:

$$-a\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{y^2}{2} + C \quad (12)$$

A solução, de modo que elevamos ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$a^4 - a^2 x^2 = \frac{1}{4} y^4 - C y^2 + C^2 \quad (13)$$

Leibniz afirmava, sobre uma curva subtangente, que havia encontrado várias soluções que podem satisfazer a equação. Podemos observar que essas várias soluções acontecem devido à família de curvas formadas, ao solucionar a Equação Diferencial. Desse modo, para cada C real, obtemos uma curva que é solução da EDO e são chamadas de soluções particulares.

Podemos observar que, no decorrer das correspondências, foram reveladas discussões significativas sobre matemática e física. Uma consonância interessante é a busca comum por soluções matemáticas e geométricas, pois ambos os pesquisadores estavam interessados em resolver problemas matemáticos complexos, como o cálculo de áreas e a identificação das curvas. Essa busca pela resolução de questões matemáticas demonstrou a convergência de seus objetivos intelectuais.

O diálogo por correspondências continuou e Huygens respondeu a Leibniz com a carta de 26/03/1691, na qual iniciou elogiando Leibniz por seus trabalhos e por ter encontrado as curvas, embora tenha colocado em dúvida a existência das curvas que satisfaçam a condição inicial. Também responde que Fatio não cita sequer a colaboração de Leibniz para sua pesquisa, embora Huygens julgue que seria pertinente o trabalho conjunto deles, por considerar que o inglês não conseguiria resolver sozinho seus problemas. Em seguida, sugeriu que Leibniz compartilhasse seus estudos sobre quadratura, conforme Huygens (1905, p. 56, tradução nossa), pois:

*“Favoreceria o público ao apresentar o seu método de quadratura, do qual você exemplificou elegantemente na curva que propus, ou seja, $2aaxx \propto aayy - y^4$, em que certamente admiro sua habilidade e a excelência de sua regra, embora limitada, assim como a outra, na minha opinião.”*²

Nesse caso, Huygens sugeriu que Leibniz compartilhasse seus cálculos sobre as curvas para que a comunidade científica tivesse acesso. Eram soluções de Equações Diferenciais resolvidas pelo método das separáveis.

Como mencionado anteriormente, as correspondências eram escritas com forte periodicidade. Em 20 de abril de 1691, Leibniz respondeu a Huygens de modo que expressou sua satisfação pela solução alcançada e, em seguida, procurou esclarecer os questionamentos levantados por Huygens. Esse último havia expressado dúvidas sobre a capacidade de uma Equação Diferencial gerar tanto uma solução geral quanto soluções particulares. Esse questionamento, nos dias de hoje, é um conceito demonstrado e validado pela comunidade científica.

Para sanar as dúvidas de seu correspondente acerca da existência de várias linhas que podem fornecer uma subtangente, Leibniz respondeu o seguinte, conforme Huygens (1905, p. 83, tradução nossa): “o senhor duvida do que eu disse, que existem várias linhas que podem gerar a subtangente $yy\sqrt{aa - xx}:ax$, e isso até lhe parece impossível. No entanto, aqui está uma, cuja equação é $xx = 2yy - \frac{1}{4aa}y^4 - 3aa$ ”³. Como pode ser observado, o autor respondeu a essas dúvidas apresentando um caso específico com uma equação que respaldava sua perspectiva, porque, se considerarmos $c = 2aa$, teremos a expressão mencionada por Leibniz.

Mostramos preliminarmente que a equação (13) representada por $a^4 - a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - Cy^2 + C^2$ apresenta a solução geral da Equação Diferencial $ax \, dx = y\sqrt{aa - xx}dy$. Usaremos um caso particular que, de acordo com Leibniz (Huygens, 1905), considerou $c = 2aa$. Para isso, realizamos uma substituição na solução geral, obtendo a expressão:

$$a^4 - a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - 2aay^2 + (2aa)^2 \quad (14)$$

² “Vous obligeriez aussi le public en produisant vostre methode des quadratures dont vous venez de donner un si joli echantillon dans la courbe que je vous avois proposée, scavoir $2aaxx \propto aayy - y^4$, où j’admire certes vostre adresse et l’excellence de vostre regle, quoique limitée aussi bien que l’autre, comme je crois.” (Huygens, 1905, p. 56).

³ “Ce que j’avais dit, c’est qu’il y a plusieurs lignes qui peuvent donner la tangente $yy\sqrt{aa - xx}:ax$, et même cela vous semble impossible. En voici cependant une, dont l’équation est $xx = 2yy - \frac{1}{4aa}y^4 - 3aa$ ” (Huygens, 1905, p. 83).

Colocando toda a expressão na notação mais usual, temos:

$$a^4 - a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - 2a^2y^2 + (2a^2)^2 \quad (15)$$

Que é equivalente à expressão: $a^4 - a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - 2a^2y^2 + 4a^4$ (16)

Operando termos semelhantes, $-a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - 2a^2y^2 + 3a^4$ (17)

Multiplicando a expressão por $-\frac{1}{a^2}$,

$$x^2 = 2y^2 - \frac{1}{4a^2}y^4 - 3a^2 \quad (18)$$

Como podemos observar, Leibniz estava correto ao apresentar a equação (18) como uma solução particular da Equação Diferencial contestada, pois era mais uma expressão que a satisfazia. Vale lembrar que eles fizeram parte da época em que o Cálculo Diferencial e Integral foi desenvolvido, por isso, as cartas explicitavam tantos questionamentos acerca das demonstrações realizadas, além do refinamento de conceitos matemáticos.

Posteriormente, Leibniz fez uma correção pontual referente ao equívoco escrito na carta de 02/03/1691, e afirma que diz respeito a “ $aaxx = a^4 - x^4$ ”, que lhe enviei, percebo que nos meus rascunhos está $aaxx = a^4 - \frac{y^4}{4}$; (isto é, $4aaxx = 4a^4 - y^4$), o que não havia notado quando escrevi”. Nesse caso, ele enviou uma equação faltando informações, cuja expressão correta foi apresentada na carta de 20/04/1691, na escrita da expressão em que a curva correta é $aaxx = a^4 - \frac{y^4}{4}$ que é uma solução particular da equação

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2(4a^2 - y^2)}{2aax} \quad (19)$$

Observe que a equação (19) possui um modelo semelhante ao da Equação Diferencial (3). Devido às similaridades, em relação à problemática da carta que se referia às possibilidades de uma equação gerar uma família de curvas, e a maneira pela qual elas eram escritas, podemos separar suas variáveis e escrevê-la da seguinte forma $\frac{dx}{dy} = f(x)g(y)$, cuja solução é por meio de separação de variáveis.

Vale salientar que duvidaram da possibilidade de equações desse tipo gerarem famílias de curvas subtangentes (conforme mencionado por Leibniz no decorrer da carta).

No momento, ele apresentou possíveis soluções particulares para a equação mencionada; porém, como sua solução não está explícita, a fizemos para apreciação do/da leitor/a.

$$\text{Trazendo a equação para a notação atual, temos: } \frac{dx}{dy} = \frac{y^2(4a^2 - y^2)}{2a^2x}. \quad (20)$$

Por conseguinte, resolveremos a Equação Diferencial pelo método das separáveis.

$$\text{Fazendo a separação de variáveis, temos: } 2a^2x \, dx = y^2(4a^2 - y^2)dy. \quad (21)$$

Para iniciar a resolução da Equação Diferencial, podemos utilizar o método da substituição simples, ou multiplicar y^2 pela expressão para aplicar no segundo membro. Escolhemos a segunda opção, cuja solução é a integração de um polinômio, ficando:

$$2a^2x \, dx = (4a^2y^2 - y^4)dy \quad (22)$$

Aplicando a integral em ambos os membros da Equação Diferencial:

$$\int 2a^2x \, dx = \int (4a^2y^2 - y^4)dy \quad (23)$$

$$\text{Integrando, temos: } 2a^2 \frac{x^2}{2} = 4a^2 \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} + C \quad (24)$$

$$\text{Simplificando a expressão: } a^2x^2 = \frac{4}{3}a^2y^3 - \frac{y^5}{5} + C \quad (25)$$

Portanto, a solução geral da Equação Diferencial $\frac{dx}{dy} = \frac{y^2(4a^2 - y^2)}{2a^2x}$ que Leibniz enviou para Huygens com a intenção de justificar as subtangentes geradas é $a^2x^2 = \frac{4}{3}a^2y^3 - \frac{y^5}{5} + C$. Pode-se observar que, para resolvê-la, precisamos separar as variáveis e depois integrá-las para ser solucionada. Toda essa discussão foi benéfica ao desenvolvimento matemático do século XVII, porque os questionamentos sobre curvas contribuíram para o pensamento criativo desses estudiosos, pois Leibniz e Huygens estavam envolvidos em discussões matemáticas e científicas.

O processo criativo aconteceu quando eles abordaram a resolução de problemas matemáticos e a exploração de equações para encontrar soluções. Isso envolve a geração de hipóteses, a experimentação com equações e a busca por soluções que atendam aos critérios específicos dos problemas discutidos.

Adicionalmente, a correspondência aborda a problemática da quadratura de curvas, envolvendo a discussão sobre a quadratura do círculo e elipse. Paralelamente,

explorou questões científicas, como a declinação do magnetismo, e demonstra a grande valia da exposição de Huygens sobre os princípios da refração.

Nas quatro cartas citadas no presente trabalho, observamos um diálogo intelectual colaborativo que abrange temáticas matemáticas, científicas e históricas. Leibniz e Huygens compartilharam problemas, soluções e teorias, demonstrando um compromisso com a exploração do conhecimento e a resolução de problemas. Suas discussões englobam uma variedade de tópicos, desde Equações Diferenciais, quadratura de curvas, até questões científicas, como a refração da luz e a declinação do magnetismo. Essas correspondências revelam apreço pela pesquisa e o pensamento criativo que caracterizaram esses dois pesquisadores.

As temáticas das cartas eram discutidas e detalhadas para que o destinatário pudesse fazer suas colocações e, muitas vezes, compartilhar com outros colegas interessados no assunto. A título de exemplificação, Leibniz tratava o assunto por meio de cartas com Huygens que, por sua vez, discutia com Newton e Fatio. Do outro lado, os irmãos Bernoulli também estavam cientes de muitas práticas de Leibniz. Diante disso, o conhecimento matemático avançou naquele período, com a participação de várias mãos que se empenharam para fazê-lo.

A seguir, apresentamos a discussão sobre o artigo publicado por Jakob Bernoulli na *Acta Eruditorum* de 1690, no qual resolveu analiticamente o problema do movimento pendular.

Discussão epistemológica e matemática da *Acta Eruditorum* de 1690

Um outro instante em que os pesquisadores recorreram ao conhecimento do Cálculo Infinitesimal para solucionar Equações Diferenciais ocorreu quando Jakob Bernoulli (1655–1705), matemático suíço de uma família de estudiosos na área, utilizou o método das separáveis para demonstrar a solução analítica do problema do movimento de um pêndulo, que Huygens já havia apresentado à comunidade científica de forma geométrica.

Esse evento encontra-se documentado na *Acta Eruditorum* de maio de 1690, onde Bernoulli (1690, p. 217) divulgou as análises em um artigo que recebeu um título específico:

*“J.B.⁴. Análise dos problemas antes citados, propostos para determinar a curva de descida a ser percorrida por um corpo pesado uniformemente, de modo que em intervalos de tempo iguais sejam percorridas altitudes iguais, e também a solução de outro problema proposto”.*⁵ (*Acta Eruditorum*, 1690, p. 217, tradução nossa)

Como evidenciado no título do artigo, Jakob Bernoulli declarou que responderia ao problema do movimento pendular. De fato, o autor iniciou o artigo afirmando que Huygens apresentou uma solução mais básica, que nós entendemos que se remeteu à forma

⁴ J. B. escrito no título do artigo significa Jakob Bernoulli.

⁵ “J.B. *Analysis Problematis Antehac Propositi de inventionem lineæ descensus a corpore gravipercurrenda uniformiter, sic ut temporibus equalibus equales altitudines emetiatur: & alterius cujusdam Problematis Propositio*”.

geométrica, e afirmou sua intenção de abordar de maneira mais detalhada por meio do Cálculo Diferencial (*Acta Eruditorum*, 1690).

Na ocasião, Bernoulli explicou geometricamente o texto, de maneira que a forma analítica se faça presente durante a demonstração. Analisemos a Figura 2, a seguir:

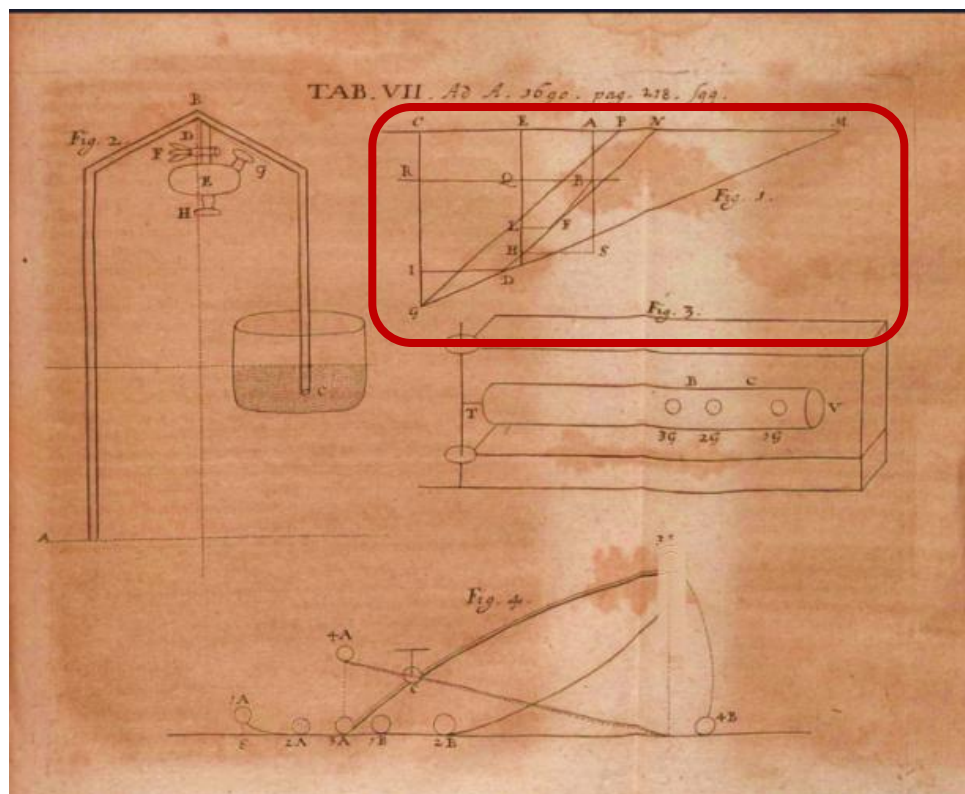


Figura 2 – Movimento pendular descrito por Jakob Bernoulli.

Fonte: Adaptado de *Acta Eruditorum* (1690, p. 218).

A Figura 2 apresenta a página em que Jakob Bernoulli esboçou geometricamente o movimento pendular para fazer as demonstrações algébricas necessárias. A parte destacada representa o movimento estudado que pode ser apreciado com mais detalhes na Figura 3.

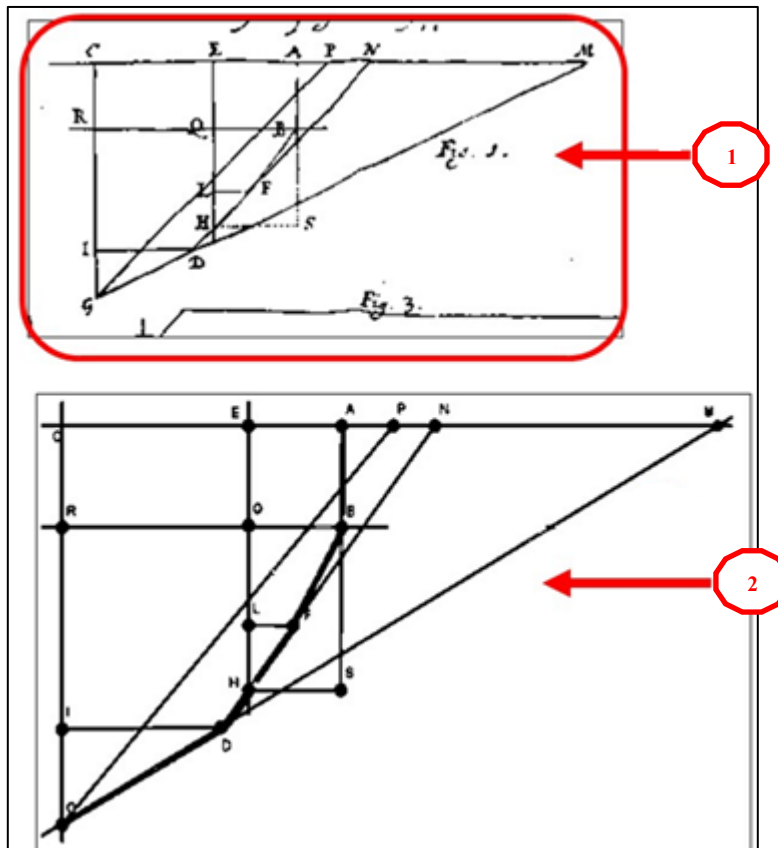


Figura 3 – Ampliação da Figura 2.

Fonte: Nascimento (2024, p. 105), adaptado de *Acta Eruditorum* (1690, p. 218).

A Figura 3 apresenta duas imagens que foram ampliadas e formatadas da Fig. 1 que foi ilustrada anteriormente na Figura 2. Pode-se destacar que a imagem 1 trata sobre a zona de interesse para essa discussão acerca do movimento pendular, em que evidencia a curva apresentada por Bernoulli. A segunda imagem foi gerada por meio da utilização do *software* livre GeoGebra – ferramenta conhecida atualmente na comunidade acadêmica para a representação gráfica de conceitos matemáticos. Como ele engloba funcionalidades de geometria, álgebra e cálculo, decidimos representar uma imagem mais destacada da curva ABHG, que esboça o movimento pendular, para melhor visualização do traço da imagem 2.

Em seguida, temos a Figura 4, que aborda o recorte de um trecho da referida *Acta Eruditorum*, em que Jakob Bernoulli apresentou parte do cálculo que solucionou o problema.

	1 $\begin{array}{l} q.e.a. \mid HL \quad HF :: GC. GP \quad a.y :: bbdyq. aadxq + \\ aadyq, \\ GM=b \mid dy. \sqrt{dxq+dyq} :: a. \sqrt{dxq+dyq} \mid bbydyq - a^3 dxq, \\ AE=x \mid CG.EH :: GMq. GPq \quad a^3 dyq, \\ EH=y \mid a. y :: bb. \frac{aadxq + aadyq}{dyq} \mid bbydyq - a^3 dyq = a^3 dxq, \\ \text{Ergo \& homum Integralia. quantur, ap.} \frac{2bby-2a^3}{3bb} \sqrt{bby-a^3} = x \end{array}$			
2	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 30%; padding: 5px;"> O que se quer demonstrar. Considere: $CG = a$ $GM = b$ $AE = x$ $EH = Y$ </td><td style="width: 30%; padding: 5px; text-align: center;"> $HL.HF :: GC. GP$ $dy. \sqrt{dxq + dyq}$ $:: a. a \frac{\sqrt{(dxq + dyq)}}{dyq}$ $CG.EH :: GMq. GPq$ $a. y :: bb. \frac{aadxq + aadyq}{dyq}$ </td><td style="width: 40%; padding: 5px;"> $a.y :: bbdyq. aadxq + aadyq,$ $bbydyq = a^3 dxq + a^3 dyq,$ $bbydyq - a^3 dyq = a^3 dxq,$ $dy \sqrt{bby - a^3} = dx \sqrt{a^3}$ </td></tr> </table> As integrais são iguais a $\frac{2bby-2a^3}{3bb} \sqrt{bby-a^3} = x$	O que se quer demonstrar. Considere: $CG = a$ $GM = b$ $AE = x$ $EH = Y$	$HL.HF :: GC. GP$ $dy. \sqrt{dxq + dyq}$ $:: a. a \frac{\sqrt{(dxq + dyq)}}{dyq}$ $CG.EH :: GMq. GPq$ $a. y :: bb. \frac{aadxq + aadyq}{dyq}$	$a.y :: bbdyq. aadxq + aadyq,$ $bbydyq = a^3 dxq + a^3 dyq,$ $bbydyq - a^3 dyq = a^3 dxq,$ $dy \sqrt{bby - a^3} = dx \sqrt{a^3}$
O que se quer demonstrar. Considere: $CG = a$ $GM = b$ $AE = x$ $EH = Y$	$HL.HF :: GC. GP$ $dy. \sqrt{dxq + dyq}$ $:: a. a \frac{\sqrt{(dxq + dyq)}}{dyq}$ $CG.EH :: GMq. GPq$ $a. y :: bb. \frac{aadxq + aadyq}{dyq}$	$a.y :: bbdyq. aadxq + aadyq,$ $bbydyq = a^3 dxq + a^3 dyq,$ $bbydyq - a^3 dyq = a^3 dxq,$ $dy \sqrt{bby - a^3} = dx \sqrt{a^3}$		

Figura 4 – Descrição matemática do Movimento Pendular.

Fonte: Nascimento (2024, p. 105), adaptado de *Acta Eruditorum* (1690, p. 218).

A Figura 4 aponta um trecho de Nascimento (2024, p. 105) página 218 do referido artigo, com o registro de três partes de expressões algébricas. Como pode ser observado na imagem 1, duas colunas apresentaram as possíveis substituições matemáticas que serão utilizadas para anunciar a Equação Diferencial que consta na coluna 3, cuja solução foi explicitada na última linha da imagem. A imagem 2 foi elaborada para que o/a leitor/a aprecie as relações matemáticas existentes no manuscrito, de maneira traduzida; porém, deixamos a notação utilizada no original.

Jakob Bernoulli fez manipulações algébricas e geométricas até chegar na Equação Diferencial que representa o movimento pendular. Ele descreveu o movimento de um objeto lançado, a partir do ponto A, definido na curva formada por ABHG. Em suas considerações, adotou os segmentos de reta: $\overline{CG} = a$, $\overline{GM} = b$, $\overline{AE} = x$, $\overline{EH} = y$, q o incremento, dx variação de x e dy variação de y . Além do mais, $\overline{GP} \parallel \overline{HN}$, $\overline{HL.HF} = \overline{CG.GP}$. Após essas ponderações, iniciou as deduções nas quais comparou os produtos das proporções entre os segmentos de retas $\overline{CG.EH} :: \overline{GMq.GPq}$, com isso, substituindo as devidas representações, apresentou a expressão:

$$a.y :: bb. \frac{aadxq + aadyq}{dyq} \quad (26)$$

$$\text{Trazida à notação mais usual, temos } a.y :: b^2 \cdot \frac{a^2 dxq + a^2 dyq}{dyq} \quad (27)$$

Diante de algumas manipulações algébricas, Jakob chegou à Equação Diferencial:

$$b^2 y dyq = a^3 dxq + a^3 dyq \quad (28)$$

$$\text{Isolando as variáveis em seus respectivos membros, temos: } b^2 y dyq - a^3 dyq = a^3 dxq \quad (29)$$

Ele aplicou a raiz quadrada em ambos os lados da equação. Porém, pelo fato de dy e dx serem representações infinitesimais, o autor preservou fora das raízes. Desse modo, gerou a Equação Diferencial:

$$\sqrt{(b^2 y - a^3)} dy = \sqrt{a^3} dx \quad (30)$$

Tal equação modelou o movimento pendular descrito por Huygens, apresentando outra maneira de resolvê-lo. Dessa vez, utilizando o Cálculo Diferencial e Integral do qual tinha conhecimento e estava em pleno desenvolvimento no século XVII.

Uma observação acerca da Equação Diferencial (30) trata do que conhecemos atualmente como variáveis, pois estão isoladas em cada membro, ou seja, a variável y no primeiro e a x no segundo. Isso mostra que o método de resolução utilizado para a resolver é a separação de variáveis, ou das separáveis.

Na etapa inicial do processo, é necessário aferir que as incógnitas estão isoladas. Em seguida, analisar a técnica de integração a ser utilizada. Nesse caso, será a substituição de variáveis no primeiro membro e, no segundo, basta integrar dx , pois $\sqrt{a^3}$ é constante em relação à variável x .

$$\text{Para o primeiro membro, consideremos } u = b^2 y - a^3, \text{ portanto } du = b^2 dy. \text{ Isolando } dy, \text{ gera a expressão: } dy = \frac{du}{b^2}. \quad (31)$$

Substituindo o primeiro membro por fatores em função de u e du , obtemos a equação:

$$\frac{1}{b^2} \int \sqrt{u} du = \int \sqrt{a^3} dx \quad (32)$$

$$\text{Que pode ser reescrita da seguinte forma: } \frac{1}{b^2} \int u^{\frac{1}{2}} du = \int \sqrt{a^3} dx \quad (33)$$

Para encontrar a solução geral, basta integrar ambos os membros da igualdade, o primeiro em relação a u e o segundo em relação a x .

$$\frac{1}{b^2} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \sqrt{a^3} x + c \quad (34)$$

$$\text{Organizando, temos: } \frac{1}{b^2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3} x + c \quad (35)$$

Que pode ser escrita, por meio da multiplicação e divisão de frações:

$$\frac{1}{b^2} u^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} = \sqrt{a^3} x + c \quad (36)$$

$$\text{Fazendo a multiplicação de frações, chegamos na equação: } \frac{2}{3b^2} \sqrt{u^3} = \sqrt{a^3} x + c \quad (37)$$

$$\text{Em seguida, é necessário retornar à variável inicial, } \frac{2}{3b^2} \sqrt{(b^2 y - a^3)^3} = \sqrt{a^3} x + c \quad (38)$$

Após algumas simplificações utilizando a propriedade da radiciação, alcançamos o resultado:

$$\frac{2(b^2 y - a^3)}{3b^2} \sqrt{(b^2 y - a^3)} = \sqrt{a^3} x + c \quad (39)$$

Podemos reduzir ainda mais a expressão, por meio da divisão de frações:

$$\frac{2}{3} \left(y - \frac{a^3}{b^2}\right) \sqrt{(b^2 y - a^3)} = \sqrt{a^3} x + c \quad (40)$$

$$\text{Diante da solução encontrada, Jakob supôs que } Z = y - \frac{a^3}{bb} \quad (41)$$

$$\text{Trazendo para a notação atual: } Z = y - \frac{a^3}{b^2} \quad (42)$$

$$\text{Fez as substituições necessárias em (40): } \frac{2}{3} Z \sqrt{(b^2 Z)} = \sqrt{a^3} x \quad (43)$$

$$\text{Elevou ao quadrado os membros da equação: } \left(\frac{2}{3} Z \sqrt{(b^2 Z)}\right)^2 = (\sqrt{a^3} x)^2 \quad (44)$$

$$\text{Utilizando a propriedade da potenciação: } \frac{4}{9} Z^2 (b^2 Z) = a^3 x^2 \quad (45)$$

Finalizando a expressão com a multiplicação dos termos semelhantes, temos:

$$\frac{4}{9} Z^3 b^2 = a^3 x^2 \quad (46)$$

$$\text{Após esse processo, Bernoulli isolou } Z^3: Z^3 = \frac{9a^3 x^2}{4b^2} \quad (47)$$

Na parte final do artigo, Bernoulli explicou que fez as considerações da equação (43) para verificar se o movimento AB seria perpendicular em relação à A e AC e BR, como podemos averiguar em *Acta Eruditorum* (1690, p. 219, tradução nossa):

“Portanto, traçada uma perpendicular $AB = \frac{a^3}{b^2}$ a partir de A. E traçada a linha BR paralela à linha AC a partir do vértice B, com o eixo BR e o lado reto $\frac{9a^3}{4b^2}$ de $\frac{9}{4}AB$. Descreva-se a curva parabolóide BHG de tal

natureza que um sólido do lado reto seja igual a um quadrado na abscissa, aplicado a um cubo com a aresta tx. Essa é a questão proposta.”⁶

Com essas especulações, Bernoulli verificou que o objeto ao descer pela curva BHG, percorre alturas iguais em intervalos de tempo iguais e, se a velocidade adquirida em B continuar descendo uniformemente através de BS; nesse caso, é evidente que, em um tempo duas vezes maior, move-se a mesma distância que é percorrida pelo movimento uniformemente acelerado a partir do repouso. Portanto, se BS for considerado o dobro de AB, conseqüentemente, o tempo de descida através de BH após AB é igual ao tempo através de AB.

Como pode ser observado, Jakob chegou em uma Equação Diferencial que foi resolvida pelo método das separáveis, pois integrou ambos os membros e chegou à solução do problema. Nele, utilizou-se do conhecimento matemático em Equações Diferenciais para resolver um problema que, até aquele momento, supunha-se sua resolução geométrica.

Com esse conhecimento gerado por meio da modelagem de uma Equação Diferencial, foi comprovado que o período de oscilação do pêndulo independe da amplitude do movimento, pois é constante, mostrando que há isocronismo. Os pesquisadores que se debruçaram sobre o problema, conseguiram criar relógios mais precisos com a medição do tempo de maneira mais consistente e confiável, tornando os relógios de pêndulo uma tecnologia relevante à época.

Enfim, o processo criativo fez-se presente, pois percebeu-se que a solução geométrica feita por Huygens poderia ter um olhar diferente daquele inicial, pois havia conhecimento matemático suficiente para fazer investigações e suposições capazes de formular representações criativas. De fato, tais averiguações geraram novos conhecimentos matemáticos, resolvendo problemas em aberto, e, em seguida, após a solução, surgiram mais questionamentos para que a temática pudesse se desenvolver.

Na análise acerca do método das separáveis, explicitamos e comentamos conteúdos de correspondências realizadas entre Huygens e Leibniz, além da *Acta Eruditorum* escrita por Jakob Bernoulli. À vista disso, apresentamos o pensamento criativo dos pesquisadores. Sintetizando o que se discutiu nesta seção, pode-se afirmar que exploramos os aportes significativos de Huygens, Jakob Bernoulli e Leibniz, estudiosos que contribuíram para o desenvolvimento desse campo.

Considerações Finais

Este artigo buscou evidenciar como o desenvolvimento das Equações Diferenciais, particularmente o método das separáveis, ocorreu em um contexto histórico e científico que envolveu diversas trocas intelectuais entre pesquisadores da época, como Leibniz, Huygens

⁶ “*Quare demissa ex A perpendiculari AB = $\frac{a^3}{b^2}$ ductaque BR parallela ipsi AC li vertice B, axe BR & latere recto $\frac{9a^3}{4b^2}$ seu $\frac{9}{4}AB$, describatur Curva Paraboloidica BHG ejus naturæ, ut solidum ex latere recto in Quadratum abscissae aequetur cubo applicato tx, habetur quaesitum*” (*Acta Eruditorum*, 1690, p. 219).

e Jakob Bernoulli, a partir das correspondências comprovadas, bem como dos documentos do periódico *Acta Eruditorum*.

Através de uma análise histórica e epistemológica, foi possível perceber que a matemática da época não era um conhecimento estático, e ainda é um conhecimento em permanente transformação e inovação de conhecimento que é desenvolvida por meio de debates, ajustes e refinamentos contínuos. Esse processo promoveu o desenvolvimento das Equações Diferenciais, além de percepções acerca do processo criativo.

Bibliografia

ACTA ERUDITORUM: J.B.ANALYSIS PROBLEMATIS ANTEHAC ' PROPOSITI , de inventione lineæ descensus a corpore gravipercurrenda uni . formiter, fic ut temporibus æqualibus equales altitudines enqetia y : tur & alterius cujusdam Problematis Propofirio .. Leipzig, 1690. Disponível em: <https://www.europeana.eu/es/item/92004/object_NKCR_D_V_000009_2EOLAGB>. Acesso em: 20 jun. 2023. p. 217–219.

ALMEIDA, Ítalo D'Artagnan. *Metodologia do trabalho científico* / Ítalo D'Artagnan Almeida. – Recife: Ed. UFPE, 2021.

BARDIN, Laurence. *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70, 1977.

FACHIN, O. *Fundamentos de metodologia*. São Paulo: Saraiva, 2006.

GIL, Antônio Carlos. *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo: Atlas, 2008.

GODOY, Arilda Schmidt. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. *RAE - Revista de Administração de Empresas*, São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63, 1995.

HUYGENS, Christiaan. Oeuvres complètes: tome x. Correspondance 1691-1695. Den Haag: Martinus Nijhoff, 1905. 916 p. Disponível em: <https://www.dbnl.org/tekst/huyg003oeuv10_01/colofon.php>. Acesso em: 20 maio 2023.

MARTINS, Roberto de Andrade. Introdução. A história das ciências e seus usos na educação. p. xxi-xxxiv. In: SILVA, Cibelle Celestino (ed.). *Estudos de história e filosofia das ciências: subsídios para aplicação no ensino*. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

MENDES, Iran Abreu. *História da Matemática no ensino: entre trajetórias profissionais, epistemologias e ensino*. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

MENDES, Iran Abreu. *Matemática e Investigação em Sala de Aula: Tecendo Redes Cognitivas na Aprendizagem*. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2009.

NASCIMENTO, Anna Karla Silva do. *Um estudo histórico acerca de métodos de resolução de equações diferenciais: método das separáveis e método das lineares* / Anna Karla Silva do Nascimento. – 2024. 282 f.: il. Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Natal, RN, 2024.

STRUIK, D. J. (editor). *A Source Book in Mathematics (1200-1800)*. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1969.

ZILL, Denis G. *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*. 2.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

Anna Karla Silva do Nascimento
Instituto de Formação de Educadores – UFCA –
Brejo Santo - Brasil

E-mail: karla.nascimento@ufca.edu.br

Iran Abreu Mendes
Departamento de Matemática – UFPA – Belém -
Brasil

E-mail: iamendes1@gmail.com