Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 13 nº 27 - pág. 17-32
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

LUAS, ÁREAS E QUADRATURAS - UM PROBLEMA E MUITOS SÉCULOS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

M. Elisa E. L. Galvão
Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN – Brasil

Vera H. G. de Souza
Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN – Brasil

(aceito para publicação em outubro de 2013)

Resumo

Nosso objetivo, com este trabalho, é traçar o percurso histórico da solução do problema da quadratura das luas, dando destaque aos seus principais episódios, nos mais de dois milênios para que se chegasse à sua resposta final, que aguardou pelo desenvolvimento do conhecimento matemático e das técnicas necessárias ao progresso na sua solução. As civilizações mais antigas desenvolveram técnicas ou práticas para medição e cálculo de áreas associadas a figuras geométricas simples como triângulos, quadriláteros e regiões poligonais. Os gregos, dada a importância das construções com a régua sem escala e o compasso, por volta do século V a.C., estabeleceram o procedimento da quadratura para obter a área de uma figura geométrica. Desde aproximadamente 500 a.C., uma pergunta esteve presente entre os matemáticos e só foi completamente respondida no século XIX: é possível construir, com régua sem escala e compasso, um quadrado equivalente a um círculo? A partir da noção de quadratura, vamos examinar exemplos que foram estudados por Hipócrates de Chios, relacionados à quadratura de regiões especiais, limitadas por arcos de circunferência, as chamadas luas. Foram as primeiras quadraturas efetuadas para regiões não poligonais, baseadas em métodos elementares de comparações de áreas. Percorreremos o caminho histórico do problema da quadratura das luas, num trajeto determinado por uma pesquisa bibliográfica e documental. Começando com o trabalho de Hipócrates, examinaremos mais detalhadamente, entre outras, as contribuições de Ibn Al Haytham, no século X e de Wallenius, no século XVIII, esta última obtida com o auxílio das fórmulas da trigonometria de Viète, do início do século XVII. Apenas na primeira metade do século XX provou-se que os cinco exemplos até então conhecidos descreviam todas as luas cuja quadratura é possível. As questões e ideias originais e seus desdobramentos ao longo da história nos propiciam uma oportunidade para analisar o desenvolvimento dos conceitos e do pensamento matemático.

Palavras-chave: Luas, Quadraturas, História, Geometria, Trigonometria, Equações algébricas

[LUNES, AREAS AND QUADRATURES - A PROBLEM AND MANY CENTURIES IN THE HISTORY OF MATHEMATICS]

Abstract

In this paper we describe the main contributions in the historic trajetory of this problem, from Hippocrates to Al-Haytham in the 10th century and Wallenius, in 18th century, to the final solution in the 20th century, based on bibliographical and documental research. In ancient times, techniques or practices developed for measuring areas of plane figures were associated to simple geometric shapes as triangles, retangles, quadrilaterals, or polygons. After pythagorean times, Greek geometers adopted the geometric algebra and constructions using straightedge and compass. Measures and area calculations were then changed to the quadrature process Since approximately 500 b.C. up to the XIX , some questions remained unanswered, such as: Can we build a square equivalent to a given disk, using only an unmarked rule and a compass? - that is, how one is supposed to find out, by means of geometric constructions, what is the side of the square of which the surface area is equal to the circle surface area? In his attempts to square the circle, Hippocrates of Chios was able to describe quadrature processes for the first non polygonal figures. He exhibited the quadrature for three lunes, as are called the non convex regions limited by two intersecting circles. Tracking the Hippocrates'problem we will find the works of Al-Haytham in the Tenth century and Wallenius' XVIII century work. Wallenius' advances in discovering two new quadrable lunes depends on Viète's trigonometrical formulas, another important reference in mathematical history that appears in the basic studies in trigonometry. The problem of the squarable lunes was completely answered in the first part of the last century.When we bring to life the original ideas and questions and track their developments down or discuss its partial or complete answers, we have an unique opportunity to analyse how the evolution of mathematical thinking, concepts and approaches that has occurred and bring to light the importance of new techniques for its progress.

Keywords: Lunes, Quadratures, History, Geometry,Trigonometry, Algebraic Equations.

Quadratura de regiões triangulares e poligonais

Problemas relacionados à determinação de áreas de regiões planas são encontrados nos tabletes da Mesopotâmia e no papiro egípcio de Rhind. As dificuldades iniciais, nessa tarefa, estão relacionadas às regiões não poligonais. O primeiro grande desafio enfrentado foi a determinação da área do círculo. Na antiguidade clássica, com o advento das construções com régua não graduada e compasso, os gregos adotaram a chamada quadratura para a estimativa de uma área. Fazer a quadratura de uma figura geométrica é construir, com régua e compasso, um quadrado equivalente a ela, ou seja, com a mesma área da figura original. As figuras 1 e 2 ilustram uma proposta de sequência de construções que permite realizar a quadratura de regiões triangulares por métodos elementares utilizados no período clássico da matemática grega: na figura 1 temos um triângulo qualquer, que é equivalente a um retângulo, cuja quadratura pode ser obtida como na figura 2; a partir da quadratura das regiões triangulares, foram desenvolvidos processos para resolver o problema da quadratura para regiões poligonais.

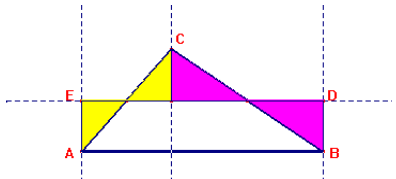


Figura 1 - O triângulo *ΔABC* é equivalente ao retângulo *ABDE*

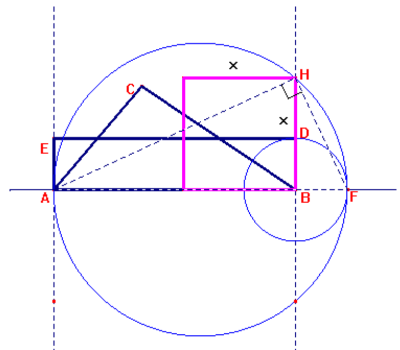


Figura 2 - O retângulo *ABDE* é equivalente ao quadrado cujo lado *x* é a altura do triângulo retângulo *ΔAFH* cuja hipotenusa tem medida *AB* = *AB* + *BF*, sendo *BF* = *BD* = *AE*.

.

Para passar da quadratura do triângulo à das regiões poligonais, o primeiro passo pode ser ilustrado considerando um quadrilátero *ABCD;* é possível encontrar um triângulo equivalente a ele tomando, por exemplo, a reta (pelo vértice *D*, na figura 3) paralela a uma de suas diagonais (na figura 3, a diagonal $\overline{AC}$) e determinando o triângulo *ACE* equivalente ao triângulo *ADC*.

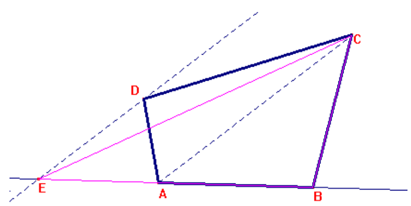


Figura 3- O triângulo *Δ BCE* é equivalente ao quadrilátero *ABCD*

Um procedimento semelhante a este era utilizado, no período clássico, para chegar à quadratura de polígonos quaisquer.

Solucionado o problema da quadratura para as regiões poligonais, os gregos se viram diante de um impasse: a quadratura do círculo. As primeiras ideias sobre o chamado "método de exaustão" (a aproximação da área por polígonos regulares inscritos) só apareceram com Eudoxus de Cnidus (410 ou 408 a.C. a 355 ou 347 a.C.). Sem esse recurso, Hipócrates de Chios recorreu aos métodos geométricos que exporemos a seguir para os primeiros estudos da quadratura de regiões não poligonais.

As Luas de Hipócrates de Chios

Hipócrates de Chios viveu no século V a.C. e estima-se que, entre 450 e 430 a.C., tenha escrito os *Elementos de Geometria*, seu trabalho mais importante. Embora os originais tenham se perdido, a obra é considerada precursora dos primeiros livros dos *Elementos* de Euclides e nela foram registrados importantes avanços para a Geometria do seu tempo. Os métodos e resultados obtidos por Hipócrates sobre a quadratura das luas são encontrados nos comentários de Simplicius, sobre a *Física*, de Aristóteles, que é o único registro sobre o assunto no âmbito da matemática grega.

As luas estudadas por Hipócrates de Chios ficam determinadas quando traçamos duas circunferências em um plano, com centros distintos e que têm exatamente dois pontos em comum; são as duas regiões não convexas (ou também ditas côncavo-convexas) limitadas pelos arcos de circunferência.

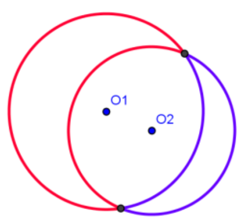


Figura 4 - As luas de Hipócrates

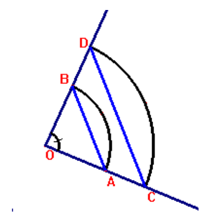


Figura 5-Segmentos e setores circulares

O estudo da quadratura das luas foi, provavelmente, considerado por Hipócrates um primeiro passo para se tentar chegar à quadratura do círculo (HEATH, 1982) . Para a quadratura, Hipócrates utilizou uma propriedade simples dos setores circulares: a razão entre as áreas de dois setores cujos ângulos centrais são congruentes é igual à razão entre os quadrados dos comprimentos de suas respectivas cordas. Ou seja, se A_1 e A_2 são as áreas dos setores circulares *OAB* e *OCD* na figura 5, temos então $\frac{A_1}{A_2} = \frac{AB^2}{CD^2}$. Esta razão $\frac{AB^2}{CD^2}$ é também a razão entre as áreas dos triângulos ΔOAB e ΔOCD e entre as áreas dos correspondentes segmentos circulares de cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ na mesma figura.

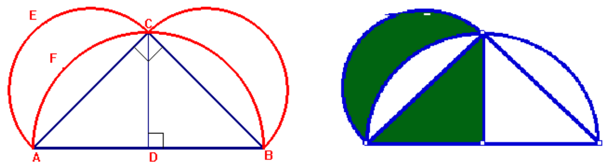


Figura 6

O primeiro exemplo estudado por Hipócrates trata da quadratura de luas cujas cordas são os lados congruentes de um triângulo retângulo isósceles, como o triângulo ΔABC na figura 6. Neste caso, a razão entre as áreas A_2 e A_1 dos semicírculos com diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, é tal que $A_2 = 2\,A_1$.

A estratégia de Hipócrates para chegar à área das luas é simples e criativa, baseada em equivalência de áreas; ele observou que, se construirmos os semicírculos menores (cuja área chamaremos A_1) tendo como diâmetros os catetos do triângulo ΔABC, retângulo isósceles, cuja área chamaremos A_t e retirarmos da figura assim obtida o semicírculo maior (com área A_2 e diâmetro $\overline{AB}$) ficamos com as duas luas (cuja soma das áreas denotaremos $2\boldsymbol{A}$). Como acrescentamos e retiramos áreas iguais ($A_2=2A_1$), sabemos que a área do triângulo inicial é igual à soma das áreas das duas luas. Ou seja, de $2\boldsymbol{A}=A_t+2A_1 - A_2$ segue que $2\boldsymbol{A}=A_t$ e, portanto, a área $\boldsymbol{A}$ de cada lua será igual à metade da área do triângulo ΔABC, ou ainda igual à área do triângulo ΔACD. Temos assim a primeira solução conhecida para o problema da quadratura de uma figura não poligonal.

Uma segunda versão do primeiro exemplo de Hipócrates, que encontramos em alguns textos (por exemplo, FAUVEL, GRAY, 1987), é a descrita pela sequência de figuras a seguir e usa a relação entre as áreas dos segmentos circulares de cordas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

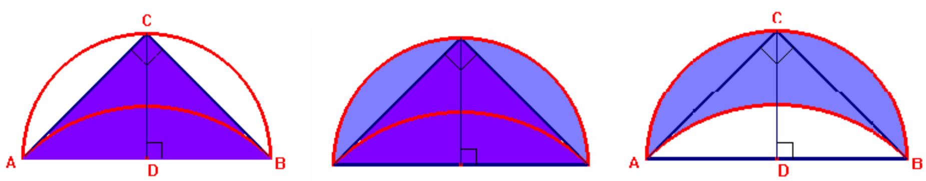


Figura 7

Novamente, temos que o triângulo *ABC* é equivalente à lua da terceira figura na figura 7.

Na sequência de seu trabalho, Hipócrates exibiu dois exemplos de luas cuja quadratura pode ser descrita com argumentos semelhantes aos que expusemos anteriormente. No primeiro deles, o arco exterior é maior que uma semicircunferência e, no segundo, menor (HEATH,1982, KNORR,1986).

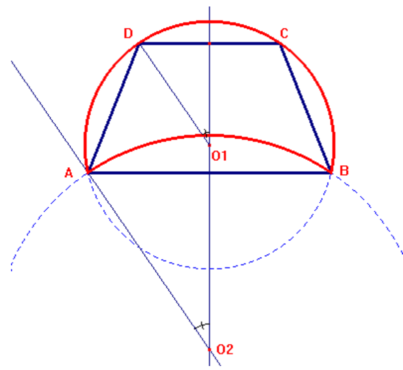


Figura 8

No exemplo em que o arco exterior é maior que uma semicircunferência (figura 8), este arco foi dividido em três arcos congruentes que correspondem a ângulos centrais congruentes ao ângulo do arco interior. A solução baseou-se na construção de um trapézio isósceles cuja base menor é congruente aos lados não paralelos; na figura 9, $AD=CD=BC$. Além disso, Hipócrates admitiu que $AB^2=3BC^2$ e que os ângulos entre os segmentos O_1D e O_2A e a mediatriz das bases são congruentes.

Com estas hipóteses, temos que a razão entre as áreas A_1 e A_2 dos segmentos circulares correspondentes às cordas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, (ou, consequentemente, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ ou $\overline{AD}$) é 3, ou seja, $A_1 = 3\,A_2$.

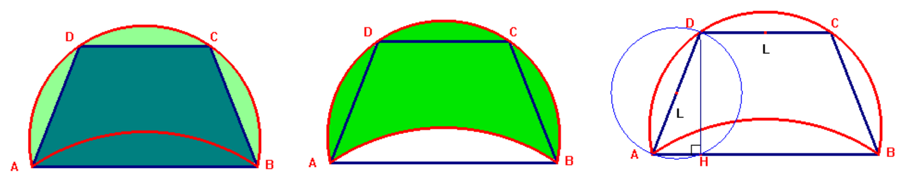


Figura 9

Podemos escrever a igualdade que decorre do argumento de Hipócrates, ilustrada pelas duas primeiras figuras da figura 9; juntando ao trapézio os segmentos circulares e retirando o segmento de corda $\overline{AB}$, temos $\boldsymbol{A} = A_T + 3\,A_2 - A_1$, onde $\boldsymbol{A}$ é a área da lua e A_T é a área do trapézio; temos $\boldsymbol{A} = A_T$ e, portanto, a lua é equivalente a um polígono. Hipócrates verificou ainda que o trapézio *ABCD*, como descrito acima, pode ser construído com régua e compasso, o que garante a quadratura da lua cujo arco exterior é maior do que uma semicircunferência. Para a construção desse trapézio isósceles cuja base menor é congruente aos lados não paralelos, com régua e compasso, uma possibilidade é começar pelo triângulo retângulo ΔAHD, conforme a figura 9, cuja hipotenusa tem comprimento *AD*

= *L*. O cateto $\overline{AH}$ deverá medir $\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}L$ e o trapézio pode ser construído a partir desse triângulo, traçando-se a paralela ao segmento $\overline{AB}$ pelo ponto *D* para obter a base menor $\overline{DC}$ e daí o lado $\overline{CB}$.

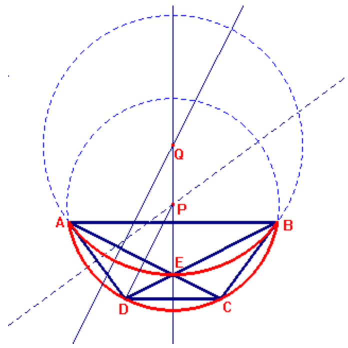


Figura 10

A figura 10 ilustra o último exemplo de Hipócrates, o caso em que o arco externo é menor do que uma semicircunferência. Novamente, teremos um trapézio isósceles cuja base menor é congruente aos lados não paralelos (agora o arco externo é dividido em três partes iguais e o arco interno em duas); o ponto de encontro das diagonais desse trapézio divide o arco interno em dois arcos congruentes e todos os arcos em ambas as circunferências correspondem a um mesmo ângulo central. Para que as áreas se compensem, neste caso deveremos ter $AE^2 = \frac{3}{2}BC^2$ e daí as áreas A_1 e A_2 dos segmentos circulares correspondentes às cordas $\overline{BC}$ e $\overline{AE}$, respectivamente, satisfarão a relação $2A_1 = 3A_2$. Neste caso, o polígono equivalente à lua será o pentágono não convexo *AEBCD*. A relação entre a área ***A***, da lua, as áreas dos setores e desse polígono, neste caso, pode ser descrita pela expressão: $\boldsymbol{A} = A_P + 3\,A_2 - 2\,A_1$, onde A_P é a área do polígono *AEBCD*, que será equivalente à lua original. A construção, com régua e compasso, do trapézio que serve de base à lua já é mais trabalhosa do que no exemplo anterior, mas verifica-se que ela é, novamente, possível.

Ao longo de mais de dois mil anos, os três exemplos de Hipócrates foram as únicas luas cujas quadraturas eram conhecidas. Os passos seguintes e essenciais para no estudo da quadratura das luas dependeram de novas fórmulas da Trigonometria e da teoria das equações polinomiais. Vamos traçar o percurso histórico da solução do problema da quadratura das luas, a partir do trabalho de Hipócrates, passando pelos seus principais episódios, nos mais de dois milênios até sua resposta final, que aguardou pelo desenvolvimento do conhecimento matemático e das técnicas necessárias para sua solução.

As fontes utilizadas para traçar esse percurso são as traduções de Rashed dos originais árabes, as traduções de um texto do renascimento e do trabalho de Wallenius e os textos originais publicados a partir do século XVIII.

O estudo das luas no mundo árabe

A expansão do mundo árabe a partir do século VIII permitiu o contato com o conhecimento dos períodos clássico e helênico e o surgimento de importantes centros de estudos na península ibérica, no Oriente Médio e no Egito. Muitos dos trabalhos de Euclides, Arquimedes, Apolônio, Ptolomeu e outros autores foram estudados e traduzidos pelos árabes, que tinham um enorme interesse em Geometria e Astronomia. Um nome de destaque nesse mundo árabe é o de Ibn Al-Haytham que viveu no início do século X (965-1040). Seus trabalhos mais famosos e conhecidos estão relacionados ao estudo da Óptica, da visão humana e das secções cônicas (SMITH, 1992). Encontramos as versões originais traduzidas de três trabalhos de Al-Haytham sobre luas e suas quadraturas: o *Tratado sobre as luas*, o *Tratado sobre a quadratura do círculo* e o *Tratado exaustivo sobre as figuras das luas*. Estes textos apareceram cronologicamente nesta ordem, e são encontrados em árabe, ao lado das respectivas traduções, ou resumidos, nos livros de Rashed (1996, 1993-2002). Segundo Rashed, são as únicas referências citadas pelos biógrafos antigos e pelo próprio Al-Haytham sobre o assunto, e não se conhecem trabalhos anteriores, em grego ou árabe, que tenham tratado da quadratura das luas desde Hipócrates de Chios. Al-Haytham afirma, em seu trabalho, que examinou o resultado "mencionado pelos antigos" sobre "a figura da lua equivalente ao triângulo". Estabeleceu a equivalência entre as áreas de luas cujos diâmetros são cordas de alguns setores circulares (um sexto ou um oitavo de círculo) e as áreas de triângulos ou triângulos e círculos (como ilustra a Figura 11). Mostrou, por exemplo, que a área de uma lua construída sobre o lado de um triângulo retângulo com um dos ângulos agudos medindo 60º é igual à soma das áreas de um triângulo equilátero cujo lado coincide com a sua corda e um círculo cuja área é igual a 1/24 da área do círculo cujo diâmetro é $\overline{AB}$.

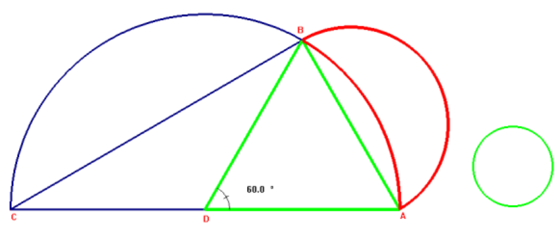


Figura 11
Fonte: Baseada na figura 3.9b, RASHED, 2002, pag 128

Reproduzindo os argumentos de Hipócrates que vimos anteriormente, Al-Haytham exibiu a quadratura da reunião de luas limitadas por circunferências construídas sobre os lados de um triângulo retângulo qualquer, como na figura 12, provando que a reunião das luas é equivalente ao triângulo retângulo.

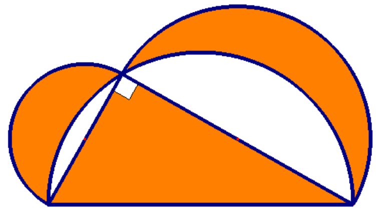


Figura 12
Fonte: arquivo pessoal

Em seguida, buscou a quadratura do círculo com base na equivalência entre uma lua e a metade do triângulo retângulo isósceles estabelecida por Hipócrates (Figura 6). Al-Haytham construiu uma circunferência tangente aos pontos médios dos arcos que limitam a lua. Afirmou que, sendo a área desse círculo menor do que a área da lua, que, por sua vez, já se sabe, equivalente ao triângulo, deve existir um triângulo retângulo (o triângulo *CMP*, interior ao triângulo *CMB*, na figura 13) equivalente a esse círculo; prometeu descrever a construção num trabalho posterior, pois como o triângulo admite uma quadratura, admitida a sua existência o problema a resolver é o da sua construção.

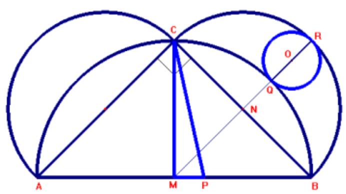


Figura 13
Fonte: baseada na figura 2.2, RASHED, 2002, pag 94

No terceiro tratado (RASHED, 1993-2002, vol 2, p. 31) Al-Haytham abandonou a perspectiva da quadratura do círculo e se dedicou a um detalhado estudo de propriedades das luas. Embora não tenha avançado na direção de descrever novos exemplos, apresenta um conjunto inicial de lemas nos quais introduz uma maneira diferenciada de estudá-las, no qual identificamos, pela primeira vez, relações trigonométricas que serão exploradas séculos mais tarde - e que foram essenciais para os estudos posteriores. No primeiro dos lemas considerou um triângulo retângulo ΔABC, no qual $AB < BC$ e $\overline{BD}$ é a altura relativa à hipotenusa $\overline{AC}$ (Figura 14).

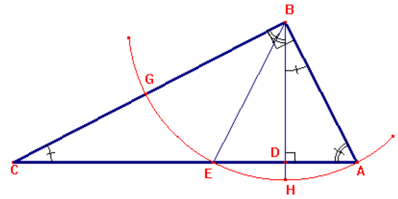


Figura 14

Al-Haytham mostrou que, neste caso, $\frac{AC}{AD} > \frac{\pi/2}{\alpha}$ ou seja, que $\frac{\sin^2\alpha}{\alpha} > \frac{2}{\pi}$, $\alpha = \angle ACB$. Veremos mais adiante que a razão $\frac{\sin^2\alpha}{\alpha}$ será muito importante no estudo da área das luas. Outras desigualdades aparecem nos lemas subsequentes, assim como um estudo de luas associadas a triângulos obtusângulos, usando equivalências estabelecidas entre círculos e setores circulares. Os trabalhos de Al-Haytham sobre luas ainda são pouco mencionados na literatura e pouco estudados pelos pesquisadores e, embora não apresentem progressos no estudo das quadraturas, apontam, pela primeira vez, a trigonometria como uma alternativa para esse estudo.

O estudo das luas no período renascentista

A única referência encontrada sobre o estudo da quadratura das luas no período renascentista que encontramos tem o título *De Lunarun Quadratura* e seu texto é reproduzido por Raynaud (RAYNAUD, D. 2006), ao final do artigo em que discorre sobre "um curto opúsculo atribuído a Leon Battista Alberti". A atribuição da autoria deste texto a Leon Battista Alberti é detalhadamente discutida e contestada no artigo e são destacadas as evidências que conduzem a uma sequência de traduções até se chegar à versão reproduzida ao final. Conclui Raynaud em seu trabalho:

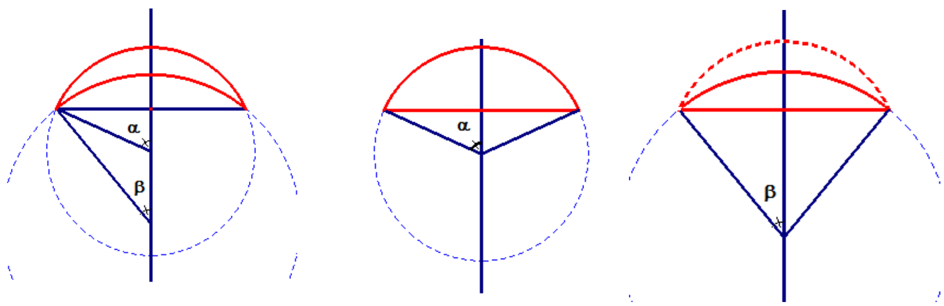
> "Le *De Lunarum quadratura* Du MS. Magl. VI243, qu'il faudrait renommer *Modo di misurare uma figura biangula par son incipt*, doit être retiré à Leon Battista Alberti. Il s´agit d´un texte apocryphe qui n´est outre qu´une version corrompue de La première quadrature d´Hippocrate tirée du commentaire de Simplicius sur la *Physique* d´Aristote, traduite em arabe, em latin, puis em italien, soit par le traducteur de *La perspectiva* d´Ibn al-Haytham et du *Liber crepusculis* d´Ibn Mu`âdh, soit après lui. Au total, entre de VIe et Le XIVe siècle, le texte a

> effectué une pérégrination complete autour du bassin méditerranéen." (RAYNAUD, D. 2006)[1]

Rashed e Raynaud nos conduzem à conclusão que, de fato, exceto as contribuições de Al-Haytham, foram os poucos avanços encontrados na solução do problema da quadratura das luas, desde Hipócrates até o século XVIII.

Dois mil anos depois de Hipócrates de Chios... os trabalhos de Wallenius, Euler e Clausen.

Passaram-se mais de dois milênios até que fossem descobertas duas novas luas cujas quadraturas se mostraram possíveis. Os avanços da Trigonometria, com a obtenção das fórmulas gerais para senos e cossenos de arcos múltiplos, dadas por Viète ao final do século XVII, permitiram que Wallenius, em 1766 e Euler, em 1772 exibissem os dois novos exemplos. Wallenius (WALLENIUS, 1766) , além disso, conduziu o problema para a sua discussão mais geral, escrevendo as correspondentes equações polinomiais, cujas soluções ele só sabia discutir quando os graus se reduziam a 2 ou 4. Vamos examinar alguns detalhes do trabalho de Wallenius.



$A = A_1 - A_2$ $\qquad$ $A_1 = r^2\alpha - \frac{1}{2}r^2\mathrm{sen}(2\alpha)$ $\qquad$ $A^2 = R^2\beta - \frac{1}{2}R^2\mathrm{sen}(2\beta)$

Figura 15

A área $\boldsymbol{A}$ da lua da figura 15 pode ser calculada como a diferença das áreas $\boldsymbol{A_1}$ e $\boldsymbol{A_2}$ dos segmentos circulares**;** a área de cada segmento é obtida subtraindo da área do setor circular a área do triângulo correspondente, supondo o ângulo $\beta < \pi/2$.

As informações anteriores podem ser reunidas em uma só figura.

[1] "O *De Lunarum quadratura* Du MS. Magl. VI243, que deveria ser intitulado *Modo di misurare uma figura biangula par son incipt*, não deve ser atribuído a Leon Battista Alberti.Trata-se de um texto apócrifo que é uma versão alterada da primeira quadratura de Hipócrates contida no comentário de sobre a *Physique* de Aristóteles, traduzida em árabe, latim e depois em italiano, ou pelo tradutor de *La perspectiva* de Ibn al-Haytham e do *Liber crepusculis* de Ibn Mu`âdh, ou a partir dele. Entre o VI e o XIVe siècle, o texto circulou pelo região mediterrânea." (RAYNAUD, D. 2006)

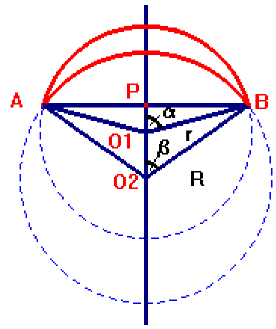


Figura 16

A lua da figura à esquerda, limitada exterior e interiormente, respectivamente, pelos arcos cujos raios são *r* e *R* e cujos ângulos centrais têm medidas 2α e 2β tem sua área dada pela diferença das medidas das áreas dos correspondente segmentos de círculo de corda $\overline{AB}$ cujas medidas estão expressas nas legendas acima. A área da lua será, portanto:

$$\mathrm{A} = \mathrm{r}^2\alpha - \mathrm{R}^2\beta - \frac{1}{2}\mathrm{r}^2\mathrm{sen}(2\alpha) + \frac{1}{2}R^2\mathrm{sen}(2\beta)$$

Esta expressão será mais simples se trabalharmos com a hipótese de que

$$r^2\alpha - R^2\beta = 0\ . \quad (*)$$

Como os dois segmentos circulares têm a corda $\overline{AB}$ em comum, temos ainda uma relação trigonométrica:

$$PB = r \text{ sen } \alpha = R \text{ sen } \beta. \quad (**)$$

Usando *(*)* teremos então a relação $\frac{\sin^2\alpha}{\alpha} = \frac{\sin^2\beta}{\beta}$ que nos remete ao estudo se Al-Haytham, que será também explorada no trabalho de Euler que comentaremos a seguir. Se escrevermos $R^2 = ur^2$, sendo $u = \frac{\alpha}{\beta}$, voltando à expressão para *(**)* *PB***,** teremos $sen(u\beta) = \sqrt{u}sen(\beta)$.

A hipótese *(*)* para a simplificação da expressão para a área corresponde às relações entre as áreas dos setores inicialmente considerados por Hipócrates. Somente ao final do século XX os matemáticos conseguiram provar que esta hipótese é necessária para que a quadratura da lua seja possível (POSTINIKOV, 2000; GIRSTMAIR, 2003).

A descoberta de novas luas é consequência da existência de soluções construtíveis para equação obtida de $sen(u\beta) = \sqrt{u}sen(\beta)$. Como a equação envolve fórmulas trigonométricas para os senos e cossenos dos arcos múltiplos, para o seu estudo foram necessárias as fórmulas descritas por Viète, na virada do século XVII.

Wallenius encontrou as soluções construtíveis das equações correspondentes aos valores: *u* = 2, 3, 3/2, 5 e 5/3, usando as fórmulas de Viète; vejamos, em cada caso, o tipo de equação associada e sua solução.

Quando *u = 2 a* equação (*) fica na forma: $\sqrt{2}sen(\beta) = sen(2\beta)$ ou seja, $\sqrt{2}sen(\beta) = 2sen(\beta)\cos(\beta)$. Como $\beta \neq 0$, $\cos(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, logo, $\beta = \pi/4$ *e* $\alpha = \pi/2$, o que nos remete à primeira lua estudada por Hipócrates, com $R = r\sqrt{2}$ (Figura 6).

Para *u =3*, a equação (*) fica na forma: $\sqrt{3}sen(\beta) = sen(3\beta)$. A fórmula de Viète para $sen(3\beta)$ nos dá: $sen(3\beta) = sen\beta(3 - 4sen^2\beta)$, e a igualdade acima ficará: $\sqrt{3}sen(\beta) = 3sen(\beta) - 4sen^3(\beta)$. Como $\beta \neq 0$, $sen\beta \neq 0$ e $4sen^2(\beta) = 3 - \sqrt{3}$ ou $sen^2(b) = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}$; neste caso, $R = r\sqrt{3}$. Temos, agora, o segundo exemplo de Hipócrates, em que o arco exterior é maior que uma semicircunferência (Figuras 8 e 9).

O terceiro exemplo de Hipócrates corresponde a *u = 3/2*. Neste caso, $u = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2}$, $R = \sqrt{\frac{3}{2}}r$, o que nos remete ao arco externo menor que uma semicircunferência (Figura 10). Para encontrar a solução de $\sqrt{u}\,\mathrm{sen}(\beta) = \mathrm{sen}(u\beta)$, chamando θ = $\frac{\beta}{2}$, teremos $\sqrt{3}$ sen *2*θ = $\sqrt{2}$ sen *3*θ. Cálculos semelhantes aos do caso anterior nos conduzem à equação do segundo grau: $4\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 1 = 0$, cuja solução $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{11})}{8}$ nos dá $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{9 - \sqrt{33}}}{4}$. Com esses valores para o seno e cosseno do ângulo θ, no triângulo retângulo *ΔPMC*, na figura 17, teremos que MC = r sen 2θ ; por outro lado, no triângulo retângulo *ΔPNC*, *CN* = $\frac{a}{2}$ = r sen θ. Daí, *AC = 2 MC = 4 r sen* θ *cos* $\theta = 2\,\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{11})}{8}a = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{22}}{4}a$ e temos verificadas as condições do exemplo de Hipócrates que permitem a construção do polígono.

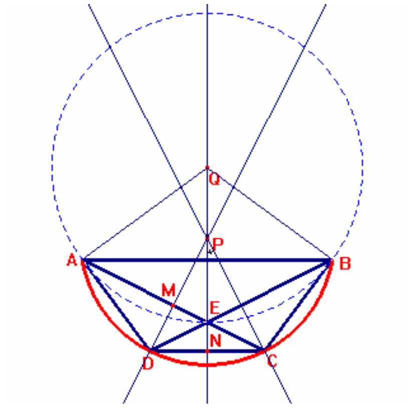


Figura 17

Os novos exemplos exibidos por Wallenius (Figura 18) correspondem a $u = 5$ *e* $u = 5/3$. Quando $u = \dfrac{\alpha}{\beta} = 5$, $R = \sqrt{5}r$; a equação $\sqrt{u}\,\mathrm{sen}(\beta) = \mathrm{sen}(u\beta)$ neste caso nos conduz a $\sqrt{5}$ sen $\beta = 5$ sen β *-20* sen$^3\beta$ + *16* sen$^5\beta$, cuja possível solução não nula para $sen^2\beta$ é $\dfrac{5-\sqrt{4\sqrt{5}+5}}{8}$; o ângulo β será construtível com medida aproximada de 23, 5º (Wallenius utilizou logaritmos para chegar a esse valor).

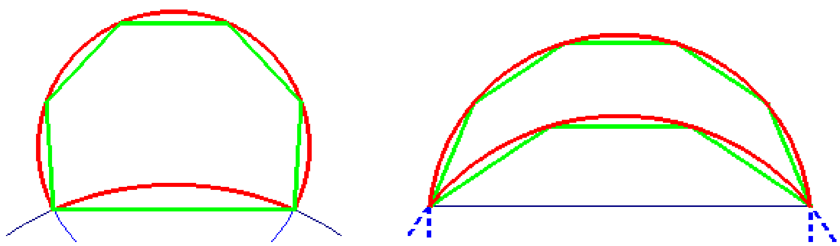


Figura 18

No último caso $u = \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{5}{3}$, $R = \sqrt{\dfrac{5}{3}}r$ e a equação, tomando $3\theta = \beta$ agora fica na forma $\sqrt{5}\mathrm{sen}\,3\theta = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,5\theta$ ou $\sqrt{3}(5\mathrm{sen}\theta - 20\mathrm{sen}^3\theta + 16\,\mathrm{sen}^5\theta) = \sqrt{5}(3\,\mathrm{sen}\theta - 4\,\mathrm{sen}^3\theta)$. As possibilidades não nulas para $\mathrm{sen}^2\theta$ são $\dfrac{1}{24}(15-\sqrt{15}\pm\sqrt{60+6\sqrt{15}})$, e a solução θ = 16,81º corresponde ao sinal negativo. A solução positiva nos dá θ = 63,19º e o ângulo 3θ = β ultrapassará 180º.

Observamos que, para todos os valores de *u* escolhidos acima temos equações do segundo grau ou equações biquadradas, cujas soluções são simples, e nos permitem mostrar que a quadratura das luas correspondentes é possível.

Euler (EULER, 1744,1772) também chegou aos dois novos exemplos encontrados por Wallenius em 1772, depois de ter publicado, em 1740, um trabalho sobre cálculo de áreas de figuras como as luas, no qual explora as expressões trigonométricas relacionadas às áreas dessas figuras, sem chegar aos exemplos, que aparecem publicados mais de trinta anos depois. Nesse segundo trabalho, Euler relaciona e discute a solução do problema estudando a função $\frac{\sin^2 a}{a}$, que encontramos pela primeira vez nos textos de al-Haytham e que é o ponto fundamental também na resposta final à questão.

No século XVIII, encontramos o artigo de Clausen (CLAUSEN, T. 1840) que contém um resumo bastante preciso das condições a serem estudadas para se discutir a quadratura das luas, condições estas já estabelecidas por Wallenius. São reapresentados os cinco exemplos até então conhecidos, mas o trabalho não avança na resposta à questão geral da construtibilidade das soluções das equações relacionadas à geometria das luas.

As respostas finais

O problema, em sua forma mais geral, que conduz à investigação sobre a possibilidade da quadratura para novos exemplos, depende essencialmente, como vimos acima, do estudo das equações resultantes da utilização das fórmulas da trigonometria para as funções de arcos múltiplos. A quadratura das luas tem, portanto, desde a antiguidade até o século XVIII, uma formulação que começa na Geometria, passa pela Trigonometria e chega à Álgebra; deparamo-nos então com a questão da construtibilidade das raízes de uma equação algébrica, esta agora não elementar, com respostas iniciais somente na segunda metade do século XIX. A resposta, do ponto de vista geral, para existência de luas quadráveis, só foi conseguida na primeira metade do século XX, e está nos trabalhos de vários matemáticos (TSCHAKALOFF, 1929; TSCHEBOTARÖW, 1934; DORODNOV, 1947; POSTINIKOV, 2000). Depois de aproximadamente dois milênios, a conclusão é que não temos outros exemplos de luas cujas quadraturas sejam possíveis, além dos descobertos por Hipócrates e Wallenius.

Bibliografia

CLAUSEN, Thomas. 1840. Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrirbar ist. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **vol. 21**. 375– 376.

DORODNOV, A.V. 1947. O kruvykh lunochkakh kvadriruemykh pri pomoshchi tsirkulya i lineiki. In: *Dokl. Akad. Nauk. SSSP*, **58**. 965-968.

EULER. L. 1744. Solutio Problematis geometrici circa lunulas a circulis formatas. In: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, **9**. 207-221.
EULER. L. 1772. Considerationes cyclometricae. In: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, **16**. 160-170.
FAUVEL, John; GRAY, Jeremy. 1987. *The History of Mathematics – a reader*. An Open University Course Reader. UK: MacMillan.
GIRSTMAIR, Kurt. 2003. Hippocrates´lunes and transcendence. In: *Expositiones Mathematicae*. **vol. 21, nº 2.** 179-183.
HEATH, Sir Thomas Little. 1982. *A History of Greek Mathematics*. v**ol. I.** NY: Dover Pub. Inc.
KNORR, Wilbur Richard. 1986. *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. NY: Dover Pub. Inc.
POSTINIKOV, M. M. 2000. The Problem of Squarable Lunes. In: *The American Mathematical Monthly*. **vol. 107. ago-set.** 645-651.
RASHED, Rushdi. 1996. *Encyclopedia of the History of Arabic Science*, **vol. 2**. London/New York: Routledge.
RASHED, Rushdi. 1993-2002. *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*. **vol. 2.** London: Al-Furqan Islamic Heritage Foundation.
RAYNAUD, Dominique. 2006. Le traité sur la quadrature des lunules attribué à Leon Battista Alberti. In: *Albertiana*, **9.** Firenze. 31-68.
SMITH, John D. 1992. The Remarkable Ibn al-Haytham. In: *The Mathematical Gazette (Mathematical Association),* **vol. 76, nº 475**. 189–198.
TSCHAKALOFF, L. 1929. Beitrag zum Problem der quadrierbaren Kreisbogenzweiecke. In: *Mathematische Zeitschrift*, **30**. 552-559.
TSCHEBOTARÖW, N. 1934. Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke. In: *Mathematische Zeitschrift*. **39**. 161-175.
WALLENIUS, Martin Johan. 1766. *Dissertatio Gradualis: Lunulas Quasdam Circulares Quadrabilis*. Translated and annotated by Ian Bruce. http://www.17centurymaths.com/contents/lunes.pdf, acesso em 05/2013.

M. Elisa E. L. Galvão
Pós-Graduação – UNIBAN – Campus Maria Cândida – São Paulo –Brasil
E-mail: meelg@ig.com.br

Vera H. G. de Souza
Pós-Graduação – UNIBAN – Campus Maria Cândida – São Paulo -Brasil
E-mail: verahgsouza@gmail.com